ORSAY
N° d'ordre : 7856

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences
de l'Université Paris XI Orsay
Spécialité : Mathématiques

par

David MADORE

Sujet :

Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible

soutenue le 8 avril 2005 devant la commission d'examen

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE	Directeur de thèse
Olivier DEBARRE	Président
David HARARI	Examinateur
Brendan HASSETT	Rapporteur
Laurent MORET-BAILLY	Rapporteur

Résumé : Cette thèse présente quelques résultats portant sur l'arithmétique de variétés rationnellement connexes et, plus spécifiquement, des hypersurfaces cubiques, dans trois directions principales : l'équivalence rationnelle, la R-équivalence, et l'approximation faible. Dans la première partie, on décrit de façon explicite la spécialisation de la R-équivalence. La seconde est consacrée à la nullité du groupe de Chow de 0-cycles de degré 0 sur une hypersurface cubique ayant bonne réduction sur les p-adiques. La troisième montre un résultat d'approximation faible aux places de bonne réduction sur les surfaces cubiques sur les corps de fonctions. La quatrième montre la R-trivialité des hypersurfaces cubiques de grande dimension sur les p-adiques. La cinquième partie explicite par un calcul la non-nullité du groupe de Chow de 0-cycles de degré 0 d'une hypersurface cubique de dimension 3 sur un corps de dimension 2. Enfin, on étudie la R-équivalence très libre sur les variétés toriques.

Mots-clés : géométrie arithmétique, hypersurfaces cubiques, équivalence rationnelle, R-équivalence, approximation faible, groupes de Chow, zéro-cycles

---

Abstract: This thesis presents some results concerning the arithmetic of rationally connected varieties and, more specifically, cubic hypersurfaces, in three main directions: rational equivalence, R-equivalence, and weak approximation. In the first part, we describe explicitly the specialization of R-equivalence. The second part deals with the vanishing of the Chow group of 0-cycles of degree 0 on a cubic hypersurface having good reduction over the p-adics. The third shows a result of weak approximation at places of good reduction for cubic surfaces over function fields. The fourth shows the R-triviality of cubic hypersurfaces of large dimension over the p-adics. The fifth part shows, by an explicit computation, the non-vanishing of the Chow group of 0-cycles of degree 0 of a certain cubic hypersurface of dimension 3 over a field of dimension 2. Finally, we study very free R-equivalence on toric varieties.

Keywords: arithmetic geometry, cubic hypersurfaces, rational equivalence, R-equivalence, weak approximation, Chow groups, zero-cycles

---

MSC (2000): 11D25, 11G25, 14G20, 14G27, 14H05, 14J26

Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible

David A. Madore

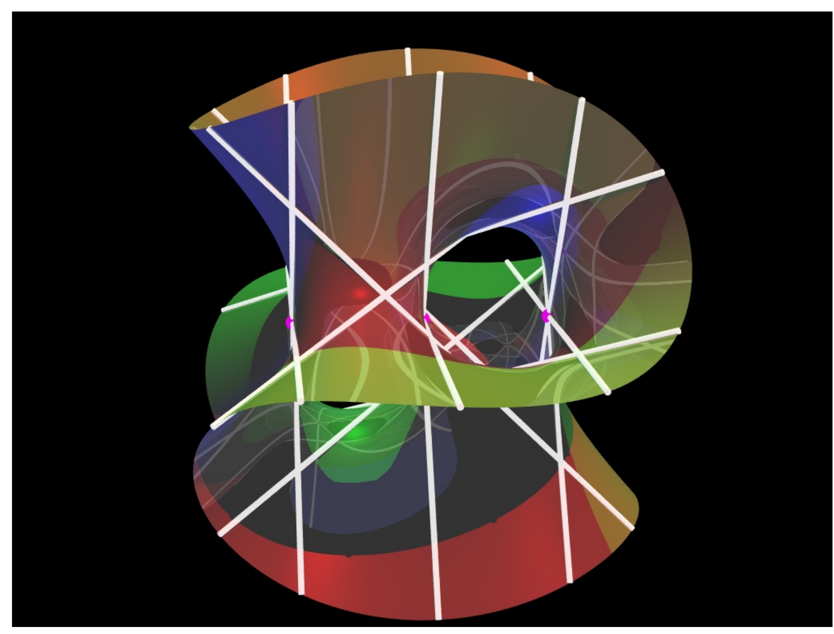
15 avril 2005

Table des parties

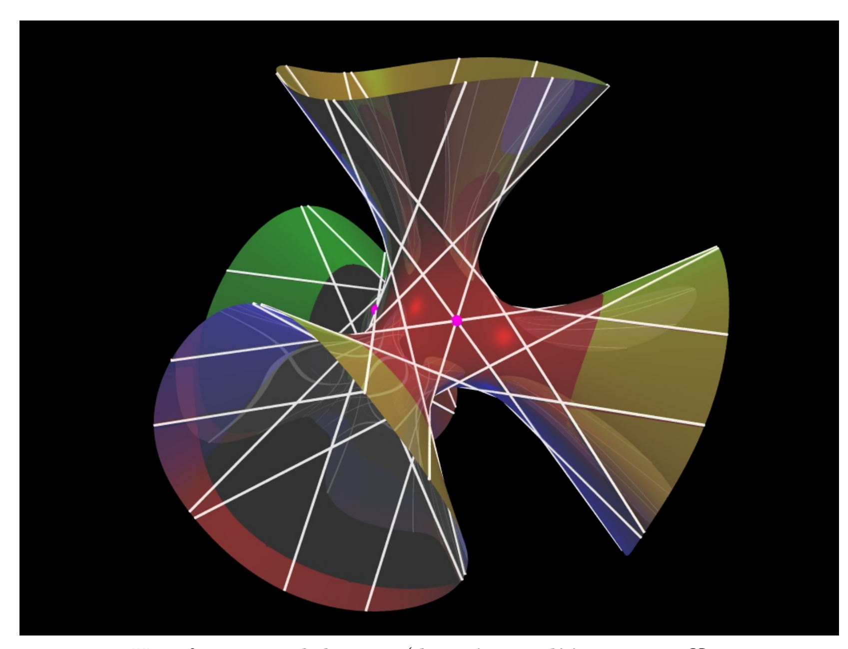
Note : À l'exception de l'introduction (qui présente l'ensemble et en donne le plan), les sept parties qui composent ce mémoire sont entièrement indépendantes. Chacune introduit ses propres notations, a sa propre bibliographie et porte une numérotation indépendante des sections et énoncés. Les pages sont numérotées en double, une fois à l'intérieur de la partie et une fois, dans le coin inférieur, pour l'ensemble du mémoire.

Historique des versions antérieures de ce texte :

- 2004-12-13 : Première version regroupant toutes les parties.
- 2005-03-20 : Modifications demandées par les rapporteurs.
- 2005-03-27 ou 2005-03-29 : Premier tirage.
- 2005-04-15 : Second tirage. Version déposée.



Une surface cubique (d'équation affine $y^3 - 3x^2y + z^3 - 3z = 0$) ayant quinze droites réelles et six points d'Eckardt réels (dont trois à l'infini).



Une forme euclidienne (donnée par l'équation affine $135 + \sqrt{2}\,x^3 - 3x^2y + 2y^3 - 3\sqrt{2}\,xz^2 - 3yz^2 - 9\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0$) de la surface cubique de Clebsch — la seule à avoir vingt-sept droites réelles et dix points d'Eckardt réels : ici, trois droites sont à l'infini et les vingt-quatre autres sont visibles sur la figure, six points d'Eckardt sont à l'infini, les quatre autres formant un tétraèdre régulier.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier ici mon directeur de thèse, Jean-Louis Colliot-Thélène, pour l'encadrement dont j'ai bénéficié de sa part tout au long de ce travail de recherche, pour ses explications toujours claires et son enthousiasme à faire partager sa culture mathématique, ainsi que pour sa très grande disponibilité et sa gentillesse. Il a été avec moi d'une patience considérable, au-delà de celle qu'un doctorant peut légitimement attendre, et je lui dois bien plus que de m'avoir seulement proposé un sujet.

Ma gratitude va également à Brendan Hassett et Laurent Moret-Bailly, rapporteurs du manuscrit, qui m'ont permis, par le soin de leur relecture et la pertinence de leurs remarques, d'en améliorer substantiellement la clarté. Je remercie aussi Olivier Debarre et David Harari d'avoir accepté de faire partie du jury.

Il me semble approprié d'exprimer encore ma reconnaissance envers quelques uns de ceux qui m'ont initié au monde fascinant de la géométrie algébrique : Luc Illusie et Michel Raynaud notamment, lorsque je faisais mon DEA, mais aussi Gérard Laumon et Yves Laszlo, qui m'ont utilement conseillé, et Philippe Gille.

Il serait impossible, en revanche, de mentionner tous ceux, trop nombreux, avec qui j'ai eu des conversations mathématiques qui m'ont été précieuses ; mais je pense devoir saluer les contributeurs du groupe `sciences.maths` du forum de l'ENS, où j'ai eu des échanges fort nombreux et fructueux : entre autres avec Joël Bellaïche, Yves de Cornulier, Fabrice Orgogozo, Hugues Randriam — et surtout Joël Riou sans lequel beaucoup de questions me seraient longtemps restées obscures.

Je remercie collectivement le département de mathématiques de l'Université de Paris-Sud et celui de l'ENS, qui m'ont accueilli dans des lieux si agréables et si propices à la réflexion mathématique, et enfin tous ceux qui m'ont prodigué leurs conseils ou leurs encouragements tout au long de cette thèse : j'espère que ce travail sera à la hauteur de leurs attentes.

Introduction

David A. Madore

15 avril 2005

> 1953 erkannte ich, daß die gerade Linie zum Untergang der Menschheit führt. Doch die gerade Linie ist zur absoluten Tyrannei geworden. Die gerade Linie ist etwas, das ohne Gedanken oder Gefühl, feige dem Lineal nachgezogen wird, es ist die Linie, die in der Natur nicht existiert. Diese Linie aber ist das morsche Fundament unserer zu Tode verurteilten Zivilisation.
>
> —Friedensreich Hundertwasser

Cette thèse présente quelques résultats portant sur l'arithmétique de certaines variétés rationnellement connexes et, plus spécifiquement, des hypersurfaces cubiques, dans trois directions principales : l'équivalence rationnelle, la R-équivalence, et l'approximation faible.

Commençons par rappeler quelques définitions.

1 Généralités

1.1 Variétés rationnellement connexes

Une variété projective lisse connexe X sur un corps k algébriquement clos indénombrable de caractéristique zéro est dite *rationnellement connexe* lorsque pour tous $x, y \in X(k)$ il existe une courbe rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ qui relie les deux points : disons $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$. On peut donner de nombreuses formulations équivalentes de cette définition (au moins sous les conditions dans lesquelles nous nous plaçons, c'est-à-dire dans cette introduction, sauf mention du contraire, X lisse, k de caractéristique nulle et indénombrable) : on renvoie à [17] ou [8] pour les détails ; mentionnons par

exemple qu'il suffit de supposer qu'on peut relier par une chaîne de courbes rationnelles deux points très généraux (c'est-à-dire situés en-dehors d'une certaine réunion dénombrable de fermés stricts), cf. [17] IV.3.9 et IV.3.10, et on peut alors faire passer une courbe rationnelle par n'importe quel nombre fini de points de X, et même prescrire les jets de cette courbe en ces points à un ordre arbitrairement élevé (cf. [8] corollaire 4.28 et exercice 4.6 ainsi que [18] 4.1.2.4 pour des énoncés précis et des démonstrations).

Il est aussi pertinent de noter ([17], IV.3.7) que X est rationnellement connexe si et seulement si il existe $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ telle que $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_X)(-2)) = 0$: on dit alors que la courbe f est *très libre* (cf. [17] II.3). Les courbes rationnelles très libres tracées sur une variété rationnellement connexe jouent un rôle très important dans la théorie de la déformation, essentiellement parce qu'elles sont les points de lissité de morphismes d'évaluation $\mathrm{ev}_\infty\colon \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0) \to X$ où $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0)$ est le schéma (voir [17], théorème I.1.10, ou [12], 4c) paramétrant les morphismes $\mathbb{P}^1_k \to X$ qui envoient 0 sur un point x_0 de X) : on renvoie à [8], propositions 4.8 et 4.9, ainsi que [17] II.3.5.3 pour des énoncés rigoureux et des démonstrations. Ceci permet de dire par exemple, au moins informellement, que toute déformation infinitésimale d'une courbe très libre se relève en une vraie déformation, même en gardant un point fixe.

En dimension 1, la seule courbe (projective, lisse) rationnellement connexe est la droite. En dimension 2, les surfaces (projectives, lisses) rationnellement connexes sont précisément les surfaces rationnelles. En toute dimension, les variétés unirationnelles (c'est-à-dire telles qu'il existe une application rationnelle surjective depuis un $\mathbb{P}^n$) sont rationnellement connexes. Une classe plus intéressante de variétés rationnellement connexes est fournie par les variétés lisses de Fano (c'est-à-dire telles que le fibré anticanonique $\omega_X^{\otimes -1}$ est ample) : ce résultat est dû indépendamment à Campana et à Kollár, Miyaoka et Mori (voir [17], V.2.13). En particulier, les hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^n$ avec $d \leq n$ (ou, plus généralement, les intersections complètes lisses d'hypersurfaces de degrés $d_1, \ldots, d_r$ avec $d_1 + \cdots + d_r \leq n$), qui sont des variétés de Fano ([17], V.1.2), sont rationnellement connexes. Les hypersurfaces cubiques (lisses) de dimension au moins 2, qui sont unirationnelles ([23] II.12.11) et qui sont aussi des hypersurface de Fano, sont donc bien rationnellement connexes ; elles constituent en un certain sens le cas non trivial le plus simple des variétés rationnellement connexes.

Nous passons délibérément sous silence les difficultés qui se présentent en caractéristique positive, où on peut donner plusieurs définitions naturelles

mais non équivalentes de la connexité rationnelle. Celle qui se comporte de la façon la plus agréable est sans doute la connexité rationnelle séparable : une variété X propre lisse connexe sur un corps k algébriquement clos est dite *séparablement rationnellement connexe* lorsqu'il existe une courbe rationnelle très libre tracée sur X (les hypersurfaces cubiques lisses, même en caractéristique positive, possèdent bien cette propriété ; toutefois, on ignore si elle vaut pour toute hypersurface lisse de Fano, et on sait qu'elle n'est pas vérifiée par certaines variétés de Fano lisses).

Du point de vue de l'arithmétique, les variétés rationnellement connexes (c'est-à-dire, qui deviennent rationnellement connexes en passant à la clôture algébrique du corps de base) devraient posséder de bonnes propriétés. Ainsi, il est permis de conjecturer qu'une variété projective lisse séparablement rationnellement connexe possède toujours un point sur un corps C_1 (rappelons qu'un corps k est dit vérifier la propriété C_r, où $r \geq 0$, lorsque toute hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^n$ possède un k-point si $d^r \leq n$; les corps C_0 sont les corps algébriquement clos, et les corps C_1 sont parfois appelés quasi algébriquement clos) : ceci est prouvé au moins pour les corps de fonctions des courbes sur un corps algébriquement clos ([14] en caractéristique nulle et [9] en toute caractéristique) et pour les corps finis ([10]). Par ailleurs, sur un corps de nombres, on peut conjecturer que les points d'une variété projective lisse rationnellement connexe deviennent denses au sens de Zariski après une extension finie du corps de base.

1.2 R-équivalence et équivalence rationnelle

Si X est une variété propre définie sur un corps k, on dit que deux points $x, y \in X(k)$ sont *directement R-équivalents* lorsqu'il existe $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ (soulignons : défini sur k) tel que $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$. La clôture transitive de cette relation définit une relation d'équivalence sur $X(k)$ appelée la R-équivalence : on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes d'équivalence, et on dit que deux points sont R-équivalents quand ils sont dans la même classe. Si $X(k)/R$ est réduit à un singleton, on dit que X est R-triviale (sur k).

Rappelons par ailleurs qu'un *zéro-cycle* sur X désigne une combinaison linéaire formelle $\sum_i n_i x_i$ de points fermés de X, le degré du zéro-cycle étant alors $\sum_i n_i \deg_k(x_i)$. Les zéro-cycles *rationnellement équivalents* à zéro sont ceux engendrés par les diviseurs de fonctions sur les courbes tracées sur X (qu'il faut définir soigneusement si la courbe est singulière : cf. [11], chapitre 1 et notamment §1.3 et §1.6, pour les détails). La notion d'équivalence

rationnelle entre deux points (c'est-à-dire le fait que leur différence soit rationnellement équivalente à zéro) est manifestement plus grossière que celle de R-équivalence. On appelle $\mathrm{CH}_0(X)$ le groupe (de Chow) des zéro-cycles modulo équivalence rationnelle, et $\mathrm{CH}_0^0(X)$ le sous-groupe formé des classes de zéro-cycles de degré zéro.

Un des problèmes arithmétiques importants sur une variété (géométriquement) rationnellement connexe X sur un corps k de nature arithmétique est celui de savoir si $X(k)/R$ est réduit à un élément ou, du moins, à un nombre fini d'éléments, et de même pour $\mathrm{CH}_0^0(X)$. Par exemple, si k est un corps local, la finitude de $X(k)/R$ est connue ([19]), mais on ignore si $\mathrm{CH}_0^0(X)$ est toujours fini (sauf dans le cas des surfaces, par des méthodes de K-théorie : [2]) ; si k est un corps fini, $\mathrm{CH}_0^0(X)$ est trivial ([16], [20]), et on peut conjecturer qu'il en va de même de $X(k)/R$, mais cela n'est connu que dans certains cas particuliers (lorsque X est une surface cubique lisse, [25], ou lorsque k est assez gros, [20]).

2 Plan

Nous présentons maintenant, dans l'ordre, les différentes parties de cette thèse, en tentant de les remettre dans leur contexte.

2.1 Spécialisation de la R-équivalence

Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète A de corps résiduel k, et $\mathscr{X}$ une variété projective sur A, de fibre générique $X = \mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, K$ et de fibre spéciale $Y = \mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, k$, on a $X(K) = \mathscr{X}(A)$ et on dispose d'une flèche de réduction $X(K) \to Y(k)$, qui sert de façon essentielle pour analyser l'arithmétique de X sur K. Il résulte facilement de la théorie de l'intersection sur les cycles (cf. [11], §2.3 et §2.6) qu'on a une flèche de spécialisation (compatible au degré) sur les zéro-cycles, $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$ (définie par la flèche de Gysin $i^*\colon \mathrm{CH}_1(\mathscr{X}) \to \mathrm{CH}_0(Y)$, où $i\colon Y \to \mathscr{X}$ est l'immersion fermée de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$). Le fait que la flèche $X(K) \to Y(k)$ passe à la R-équivalence (et définisse une flèche $X(K)/R \to Y(k)/R$), utilisé sans explication dans [21], doit sans doute être considéré comme connu, mais aucune référence ne semble disponible (bien que des faits apparentés soient dans la littérature, cf. [17] corollaire IV.3.5.2 ou théorème IV.3.11) : c'est donc l'objet de cette première partie, qui explique

comment décrire explicitement (en termes de coordonnées projectives) la façon dont se spécialise la R-équivalence.

À titre d'exemple, ceci fournit une démonstration facile du fait qu'une spécialisation d'une variété (projective lisse) rationnellement connexe est rationnellement connexe par chaînes.

La question se pose ensuite de savoir ce qu'on peut dire (injectivité, surjectivité) de la flèche $X(K)/R \to Y(k)/R$ ou bien $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$ (la réponse complète à cette question dans le cas de bonne réduction a été apportée récemment par Kollár dans [21]).

2.2 Équivalence rationnelle sur les corps p-adiques

Si X est une hypersurface cubique lisse ayant bonne réduction (c'est-à-dire ayant un modèle projectif dont la fibre spéciale Y est une hypersurface cubique lisse) sur un corps p-adique (avec $p \geq 5$), la nullité du groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro $\mathrm{CH}_0^0(Y)$ de la fibre spéciale était connue (cf. [16]) ; il s'agit donc d'un des premiers cas où la question se pose de façon intéressante de savoir si on peut montrer $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ par déformation depuis la fibre spéciale. C'est ce qui est fait dans cette partie. Le résultat porte sur l'équivalence rationnelle, mais l'essentiel des arguments travaillent sur la R-équivalence : le point de départ est un résultat de Swinnerton-Dyer ([25]) qui affirme que toute surface cubique lisse sur un corps fini est R-triviale, résultat duquel Swinnerton-Dyer avait lui-même déduit le même énoncé sur les corps p-adiques dans le cas d'une *surface* cubique (lisse de bonne réduction).

L'idée originale de notre démonstration consiste à obtenir une courbe très libre (cf. plus haut) sur la fibre spéciale, pour pouvoir ensuite la déformer. Malheureusement, pour obtenir l'existence de points dans un ouvert (correspondant aux courbes très libres) de l'espace affine, il a fallu passer par des corps « finis infinis », et, au final, on n'obtient la conclusion ($\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$) que sur l'équivalence rationnelle et non la R-équivalence.

Après ce résultat (publié dans [22]), Kollár et Szabó ont obtenu dans [20], également en déformant des courbes très libres pour passer de la fibre spéciale à la fibre générique, un résultat beaucoup plus général : si X est une variété projective lisse sur K corps local de corps résiduel k, dont on suppose la réduction Y à k lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe, on a $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$, et, si $\operatorname{card} k$ est assez grand (où « assez » ne dépend que de la dimension et du degré de X), X est R-triviale.

2.3 Approximation faible sur les surfaces cubiques

Si K est un corps global ou le corps des fonctions sur une courbe Γ sur un corps algébriquement clos et X une variété projective sur K telle que $X(K) \neq \varnothing$, on dira que X vérifie l'approximation faible en un ensemble fini S de places de K lorsque $X(K)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ où $\hat{K}_v$ est le complété de K en la place v, où on a muni $X(\hat{K}_v)$ de la topologie v-adique. Il s'agit de la question naturelle à se poser une fois acquise l'existence d'un point rationnel (et, si l'approximation faible n'est pas vérifiée, on peut chercher d'éventuelles obstructions cohomologiques pour l'expliquer).

Swinnerton-Dyer avait prouvé dans [26] que pour X une surface cubique lisse sur un corps de nombres K, dès que $X(K) \neq \varnothing$, on a l'approximation faible en n'importe quel ensemble (fini) S de places de bonne réduction de X. Ici, en s'inspirant de cette démonstration, on obtient le résultat semblable pour les corps de fonctions ; il s'agit là du premier cas non trivial obtenu d'approximation faible sur les corps de fonctions.

Très récemment, Hassett et Tschinkel ([15]) ont obtenu ce résultat pour toutes les variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes.

2.4 R-équivalence sur les hypersurfaces cubiques en grande dimension

Dans les cas de mauvaise réduction, sur un corps local, il est difficile d'utiliser des techniques de déformation depuis la fibre spéciale pour obtenir des résultats sur la fibre générique comme décrites ci-dessus. Néanmoins, on peut penser que si le nombre de variables est suffisamment grand, les propriétés seront bonnes. Le résultat ici est[1] : si X est une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 10 sur un corps p-adique (ou sur un corps C_2), alors X est R-triviale, et $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$.

On ignore à partir de quelle dimension il est vrai que $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ pour toute hypersurface cubique lisse sur un corps p-adique k. En dimension 2 le problème est bien maîtrisé car alors (voir [2]) $\mathrm{CH}_0^0(X)$ se plonge dans $H^1(k, S)$ où S est le tore dont le réseau des caractères (avec action de Galois) est $S^* = \operatorname{Pic} \bar{X}$. La dualité parfaite $H^1(k, S) \times H^1(k, S^*) \to \operatorname{Br} k = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (donnée par la théorie locale du corps de classes) correspond à l'évaluation

[1] La même démonstration donne d'ailleurs facilement la R-trivialité d'une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 4 sur un corps C_1 ; on peut se demander si ce fait est vrai en toute dimension ≥ 2, ce qui n'est pas le cas pour un corps C_2.

(non dégénérée à gauche) $\mathrm{CH}_0^0(X) \times \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, k$ (ici, $\mathrm{Br}\, X = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ désigne le groupe de Brauer cohomologique : voir [13] pour des généralités à ce sujet, et [1], appendice, pour la définition de cet accouplement). C'est-à-dire qu'en particulier l'évaluation des éléments du groupe de Brauer de X détecte exactement l'équivalence rationnelle. On peut mentionner l'exemple classique (cf. [5], exemple 2.8) de la surface cubique définie par l'équation $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + pT_3^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ avec $p \equiv 2 \pmod 3$ et $p \geq 5$, sur laquelle les deux points $\mathbb{Q}_p$-rationnels $(1 : -1 : 0 : 0)$ et $(\sqrt[3]{2} : -1 : -1 : 0)$ ne sont pas rationnellement équivalents (en fait, $\mathrm{CH}_0^0(X) \cong E(\mathbb{F}_p)/3E(\mathbb{F}_p)$, où E est la courbe elliptique $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 = 0$, la flèche étant donnée par la spécialisation). En dimension supérieure ou égale à 3, l'obstruction présentée par le groupe de Brauer tombe pour une hypersurface car alors $\mathrm{Br}\, X = \mathrm{Br}\, k$ ([24], appendice A).

2.5 Non-trivialité d'un groupe de Chow

La partie suivante montre que, bien que le groupe de Brauer ne donne dans ce cas pas d'obstruction (comme expliqué ci-dessus), on peut avoir $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$ pour une hypersurface cubique lisse de dimension 3 sur un corps de dimension cohomologique 2 (en l'occurrence $\mathbb{C}((u))((v))$, l'hypersurface étant donnée par $T_0^3 + T_1^3 + uT_2^3 + vT_3^3 + uvT_4^3 = 0$). Malheureusement, il n'a pas semblé possible de construire un exemple analogue sur $\mathbb{Q}_p$ (bien qu'il semble plausible qu'il existe effectivement des hypersurfaces cubiques lisses de dimension 3 sur $\mathbb{Q}_p$ avec $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$).

La méthode de calcul consiste à obtenir un modèle régulier explicite et à considérer la matrice d'intersection des 1-cycles de la fibre spéciale de celui-ci avec les composantes de la fibre spéciale (voir [6] et notamment [7] théorème 4 pour des énoncés, sur les surfaces, justifiant que ces méthodes de calculs permettent effectivement d'obtenir exactement le groupe de Chow des zéro-cycles ; ici, on montre simplement qu'il est non nul). Le calcul du modèle régulier se fait par des résolutions toroïdales, comme il a été suggéré par P. Deligne.

2.6 R-équivalence très libre sur les tores

En appendice, nous plaçons un résultat qui ne concerne pas les hypersurfaces cubiques : il est prouvé que sur une variété torique projective lisse sur un corps infini, deux points rationnellement équivalents sont directement

reliés (R-équivalents) par une courbe très libre. On obtient également le résultat sur une surface de Del Pezzo de degré 5 : deux points quelconques sont directement reliés par une courbe très libre. Ces deux faits s'obtiennent en étudiant les torseurs universels au-dessus des variétés considérées, et se placent dans la continuité de certaines remarques faites dans [3] et [4].

Références

[1] S. Bloch, « On the Chow groups of certain rational surfaces », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **14** (1981) 41–59.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, « Hilbert's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces », *Invent. Math.* **71** (1983) 1–20.

[3] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, « La descente sur les variétés rationnelles », in *Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979*, ed. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980, 223–237.

[4] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, « La descente sur les variétés rationnelles II », *Duke Math. Journal*, **54** (1987), 375–492.

[5] J.-L. Colliot-Thélène & S. Saito, « Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer », *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, 151–160.

[6] C. S. Dalawat, *Groupe des classes de* 0*-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (1993).

[7] C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface rationnelle sur un corps local*, disponible sur `www.arxiv.org` comme `math.AG/0302157` (extrait de [6]) ; à paraître dans *Compos. Math.*

[8] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer, Universitext.

[9] A. J. de Jong & J. Starr, « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », *Amer. J. Math.* **125** (2003) 567–580.

[10] H. Esnault, « Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point », *Invent. Math.* **151** (2003) 187–191.

[11] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).

[12] A. Grothendieck, « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert », séminaire Bourbaki, 13e année, 1960–1961, n°221.

[13] A. Grothendieck, « Le groupe de Brauer I–III », *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland (1968).

[14] T. Graber, J. Harris & J. Starr, « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 57–67.

[15] B. Hassett & Yu. Tschinkel, *Weak approximation over function fields*, preprint.

[16] K. Kato & S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, *Ann. of Math (2)* **118** (1983) 241–275.

[17] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[18] J. Kollár, « Low degree polynomial equations : arithmetic, geometry and topology », *in* : *European Congress of Mathematics, Vol. I (Budapest, 1996)*, Birkäuser, Progress in Mathematics **168**, p. 255–288.

[19] J. Kollár, « Rationally connected varieties over local fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999) 357–367.

[20] J. Kollár & E. Szabó, « Rationally connected varieties over finite fields », *Duke Math. J.* **120** (2003) 251–267.

[21] J. Kollár, « Specialization of zero-cycles », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004) 689–708.

[22] D. A. Madore, « Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques », *manuscripta mathematica* **110** (2003), 171–185.

[23] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[24] B. Poonen & J. F. Voloch, « Random diophantine equations », avec appendices par J.-L. Colliot-Thélène et N. M. Katz, *in* : *Arithmetic of Higher-Dimensional Algebraic Varieties*, B. Poonen & Yu. Tschinkel (éd.), Birkäuser, Progress in Mathematics **226**, p. 175–184.

[25] H. P. F. Swinnerton-Dyer, « Universal Equivalence for Cubic Surfaces over Finite and Local Fields », *Istituto Nazionale di Alta Mathematica Francesco Severi, Symposia Mathematica*, **24** (1981) 111-143.

[26] Sir Peter Swinnerton-Dyer, « Weak approximation and R-equivalence on cubic surfaces », *in* : *Rational points on algebraic varieties*, É. Peyre & Yu. Tschinkel (éd.), Birkäuser, Progress in Mathematics **199**, p. 359–406.

Sur la spécialisation de la R-équivalence

David A. Madore

15 avril 2005

1 Réduction des polynômes

Soit A un anneau de valuation discrète, dont on note K le corps des fractions, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal, π une uniformisante, v la valuation ($v(\pi) = 1$), et $F = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

On considérera par ailleurs un plan affine réel, dont les coordonnées seront notées (e, w) : c'est le plan dans lequel « vivent » les polygones de Newton (cf. *infra*).

Si $ax^{d-i}y^i$ (avec $i \in \mathbb{N}$ et $a \in K^\times$) est un monôme de degré total d en les variables x et y, on appelle *point associé* à ce monôme le point de coordonnées $(i, v(a))$ dans le plan affine réel de coordonnées (e, w). De plus, si $w = w_0 + se$ est l'équation d'une droite (non verticale) du plan en question, on dira que la *réduction* du monôme $ax^{d-i}y^i$ pour cette droite est $\bar{a}x^{d-i}y^i$ où $\bar{a}$ est la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $a\pi^{-v(a)} \in A$ si $(i, v(a))$ est sur la droite, 0 si $(i, v(a))$ est strictement au-dessus, indéfinie sinon.

Si $f(x, y) = \sum_i a_i x^{d-i} y^i$ est un polynôme homogène de degré d en les variables x et y et à coefficients dans K, on appelle *polygone de Newton* de ce polynôme l'enveloppe convexe dans le plan (e, w) des points associés aux monômes (non nuls) de f et du point[1] $w = +\infty$. C'est-à-dire que le polygone de Newton est l'enveloppe supérieure des droites (non verticales) situées au-dessous (au sens large) des points associés aux monômes de f.

Si $w = w_0 + se$ est une droite (non verticale) située en-dessous (au sens large) du polygone de Newton de f, on peut définir la réduction de f pour cette droite comme la somme des réductions (précédemment définies) des

[1] On comprend aisément ce que signifie cet abus de langage : que le polygone se termine aux deux extrémités par des demi-droites verticales.

1

monômes de f. Cette réduction est nulle pour toute droite strictement en-dessous du polygone : les seules droites intéressantes sont donc celles qui rencontrent le bord du polygone. Pour une telle droite, la réduction de f est un polynôme homogène de degré d en les variables x et y et à coefficients dans F. Lorsque la droite $w = w_0 + se$ n'est pas (le prolongement d')une arête du polygone, la réduction est un monôme (dont le degré en y est précisément donné par l'abscisse du sommet unique que la droite rencontre). Lorsque la droite est une arête du polygone de Newton, la réduction est un polynôme dont le nombre de termes égale le nombre de points associés à des monômes de f qui se situent sur la droite.

2 Réduction des morphismes $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^N$

Si maintenant $f_0, \ldots, f_N$ sont $N+1$ polynômes homogènes de même degré d en les variables x et y et à coefficients dans K, premiers entre eux dans leur ensemble, de sorte que $(x : y) \mapsto (f_0(x,y) : \cdots : f_N(x,y))$ peut être vu comme un morphisme $f \colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^N_K$ de degré d, on définit le polygone de Newton de f comme l'enveloppe convexe des polygones de Newton des f_j, et, pour toute droite $w = w_0 + se$ rencontrant le bord du polygone de f mais ne le croisant pas, la réduction de f comme le morphisme $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$ obtenu par réduction des f_j pour cette droite. Ce dernier point mérite une explication : d'abord, le fait que la droite rencontre sans le traverser le bord du polygone de f assure que, pour cette droite, la réduction de tous les f_j est définie et que celle d'au moins l'un d'entre eux est non nulle ; il est possible que les réductions des f_j ne soient pas premières entre elles dans leur ensemble (c'est-à-dire que l'on n'a qu'une application rationnelle $\mathbb{P}^1_F \dashrightarrow \mathbb{P}^N_F$), mais on peut toujours éliminer les facteurs communs, ce qui revient à remarquer que l'application rationnelle, étant définie en codimension 1, est définie sur tout $\mathbb{P}^1_F$.

Si la droite $w = w_0 + se$ n'est pas une arête du polygone de Newton de f, elle rencontre un unique sommet, disons d'abscisse i, et alors la réduction pour ce point de chacun des f_j est soit nulle soit réduite à un monôme de degré i en y, de sorte que la réduction de f est (après élimination du facteur commun $x^{d-i}y^i$ à la réduction de chacun des f_j) un morphisme constant. C'est-à-dire qu'à chaque *sommet* du polygone il correspond un *point* rationnel de $\mathbb{P}^N_F$. Nous appellerons *points-étapes* les points en question.

Remarquons que le premier point-étape, c'est-à-dire celui correspondant

2

au sommet de plus petite abscisse (nécessairement 0), est précisément la spécialisation de l'image par f du point $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1_K(K)$. (Rappelons qu'un K-point de $\mathbb{P}^N_K$ est la même chose, en chassant les dénominateurs, qu'un A-point de $\mathbb{P}^N_A$ dont au moins une coordonnée est de valuation nulle, et par réduction modulo $\mathfrak{m}$ on en déduit un F-point de $\mathbb{P}^N_F$, que l'on appelle *spécialisation* du point de départ.) En effet, le sommet le plus à gauche du polygone de Newton de f a pour abscisse 0 (puisque les f_j sont sans facteur commun et notamment sans facteur y commun) ; pour une droite qui ne rencontre le polygone qu'en ce point, la réduction de f est donc limitée à celle de ses monômes en x^d, et on trouve bien le point obtenu en faisant $x = 1$ et $y = 0$ puis en spécialisant. De même, le dernier point-étape est précisément la spécialisation de l'image par f du point $(0 : 1)$.

Si $w = w_0+se$ est une arête du polygone de Newton de f, la réduction de f pour cette droite est un morphisme $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$. L'image de $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1_F(F)$ par ce morphisme réduction est donnée par les coefficients des monômes de plus bas degré en y qui ne s'annulent pas par réduction pour $w = w_0 + se$; c'est-à-dire les monômes auxquels sont associés l'extrémité gauche de l'arête. Ceci montre que l'image de $(1 : 0)$ par le morphisme réduction pour $w = w_0+se$ est précisément le point-étape correspondant à l'extrémité gauche de cette arête. De même, l'image de $(0 : 1)$ par le morphisme réduction est le point-étape correspondant à l'extrémité droite de l'arête.

En définitive, aux sommets du polygone de Newton de f correspondent des *points* (rationnels) de $\mathbb{P}^N_F$, appelés points-étapes, le premier étant la spécialisation de $f(1 : 0)$ et le dernier la spécialisation de $f(0 : 1)$. Et aux arêtes du polygone correspondent des morphismes $\mathbb{P}^1_F \to \mathbb{P}^N_F$ qui relient les deux points-étapes consécutifs correspondant aux extrémités gauche et droite de l'arête considérée.

Nous dirons que nous avons *spécialisé* le $\mathbb{P}^1$ de départ, f, qui reliait $f(0 : 1)$ à $f(1 : 0)$, en une chaîne de $\mathbb{P}^1$ qui relient la spécialisation de $f(1 : 0)$ à celle de $f(0 : 1)$.

3 Spécialisation dans une variété projective

Soient maintenant h un polynôme homogène en les $N+1$ variables $z_0, \ldots, z_N$ et à coefficients dans A. On suppose que $h(f_0, \ldots, f_N)$ est identiquement nul, et on se propose de démontrer que $\bar{h}(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N)$ l'est aussi, où $\bar{h}$ est obtenu en réduisant modulo $\mathfrak{m}$ les coefficients de h, et où $\bar{f}_j$ sont les réductions,

pour une droite $w = w_0 + se$ fixée, des f_j.

Une première technique de démonstration permet d'obtenir ce résultat pour une droite de pente s rationnelle, ce qui suffit manifestement à conclure de façon générale (car les arêtes du polygone de f sont à pente rationnelle). Pour cela, appelons q un naturel non nul tel que qs soit entier : considérons le corps de rupture K' du polynôme $X^q - \pi$ sur K, c'est-à-dire que K' extrait une racine q-ième, que nous appellerons $\pi^{1/q}$, de π. On appelle A' la fermeture intégrale de A dans K' ; on note encore v la valuation de A' qui prolonge v sur A (c'est-à-dire que $v(\pi^{1/q}) = \frac{1}{q}$). Le corps résiduel de A' est le même que celui de A, c'est-à-dire F, car l'extension est totalement ramifiée. Les objets, notamment les f_j et h, à coefficients dans K, peuvent être considérés comme ayant des coefficients dans K', et évidemment l'égalité $h(f_0, \ldots, f_N) = 0$ vaut encore dans K'. Mais la réduction des f_j pour $w = w_0 + se$ rencontrant sans croiser le bord du polygone de f peut s'interpréter comme suit : on considère le morphisme $\varpi^s \colon \mathbb{P}^1_{K'} \to \mathbb{P}^1_{K'}$ donné par $(x : y) \mapsto (x : \pi^{-s}y)$; alors $f_j \circ \varpi^s$ s'obtient[2] en divisant par π^{si} le coefficient des monômes en $x^{d-i}y^i$ dans f_j, de sorte que leur valuation passe de v (disons) à $v - si$; puis, en divisant encore tous ces coefficients par π^{w_0} et en réduisant modulo $\mathfrak{m}$, on obtient bien la réduction recherchée. Puisque $h(f_0, \ldots, f_N) = 0$, on a aussi $h(f_0 \circ \varpi^s, \ldots, f_N \circ \varpi^s) = 0$, et d'après la description donnée de la réduction pour $w = w_0 + se$, on a bien $\bar{h}(\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_N)$ comme voulu.

On peut également prouver le résultat comme ceci. Si $a_1x^{d-i_1}y^{i_1}, \ldots, a_rx^{d-i_r}y^{i_r}$ sont r monômes de degré total d en les variables x et y (avec $a_1, \ldots, a_r \in K$), et $w = w_0 + se$ une droite passant en-dessous (au sens large) des points associés à ces r monômes, alors la réduction pour $w = rw_0 + se$ (noter le changement d'équation !) du produit des monômes est précisément le produit des réductions pour $w = w_0 + se$ des monômes en question. En effet, si les tous les points associés aux monômes sont sur la droite, on a $v(a_k) = w_0 + si_k$ pour tout k, par définition, donc $v(a_1 \cdots a_r) = rw_0 + s(i_1 + \cdots + i_r)$, ce qui montre que le point associé au produit des r monômes est sur la droite $w = rw_0 + se$, et la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $a_1 \cdots a_r\, \pi^{-v(a_1 \cdots a_r)}$ est le produit des $a_k\pi^{-v(a_k)}$, ce qui montre la propriété dans ce cas ; et si l'un des points associés aux monômes est strictement au-dessus de la droite $w = w_0 + se$, disons $v(a_k) > w_0 + si_k$, alors $v(a_1 \cdots a_r) > rw_0 + s(i_1 + \cdots + i_r)$, donc la réduction du produit est nulle, ce qui achève de démontrer cette propriété.

[2] Il y a là un léger abus de langage, puisque ϖ^s a été défini comme $(x : y) \mapsto (x : \pi^{-s}y)$ et qu'il s'agit ici plutôt de $(x, y) \mapsto (x, \pi^{-s}y)$.

Ce que nous venons de démontrer prouve (en développant) que, si h est un polynôme homogène de degré r quelconque en les variables $z_0, \dots, z_N$ (à coefficients dans A), alors la réduction pour $w = rw_0 + se$ de $h(f_0, \dots, f_N)$ est précisément $\bar{h}(\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_N)$, avec $\bar{h}$ obtenu en réduisant modulo $\mathfrak{m}$ les coefficients de h, et $\bar{f}_j$ les réductions des f_j pour le point $w = w_0 + se$. Dans le cas où $h(f_0, \dots, f_N) = 0$ identiquement, sa réduction pour $w = rw_0 + se$ est nulle, donc on a $\bar{h}(\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_N) = 0$ aussi.

Naturellement, si $h_1, \dots, h_n$ sont des polynômes homogènes en les variables $z_0, \dots, z_N$ tels que $h_\ell(f_0, \dots, f_N) = 0$ pour tout ℓ, alors $\bar{h}_\ell(\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_N) = 0$ pour tout ℓ, où, comme auparavant, $\bar{h}_\ell$ est obtenu en réduisant les coefficients de h_ℓ modulo $\mathfrak{m}$, et où $\bar{f}_j$ est la réduction de f_j pour une certaine droite $w = w_0 + se$ fixée.

On a donc montré que si $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma de $\mathbb{P}^N_A$ défini par les équations $h_1 = \cdots = h_n = 0$ (où les h_ℓ sont des polynômes homogènes en $z_0, \dots, z_N$ à coefficients dans A), X sa fibre générique définie dans $\mathbb{P}^N_K$ par $h_1 = \cdots = h_n = 0$ et Y sa fibre spéciale définie par $\bar{h}_1 = \cdots = \bar{h}_n = 0$ (où $\bar{h}_\ell$ est obtenu en réduisant les coefficients de h_ℓ modulo $\mathfrak{m}$), que P et Q sont deux K points de X pour lesquels il existe $f\colon \mathbb{P}^1_K \to X$ vérifiant $f(1:0) = P$ et $f(0:1) = Q$, alors les spécialisations respectives $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ de P et Q sont R-équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $\tilde{P} = \tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_m = \tilde{Q}$ de F-points Y et une suite $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ de morphismes $\mathbb{P}^1_F \to Y$ avec $\tilde{f}_t(1:0) = \tilde{P}_{t-1}$ et $\tilde{f}_t(0:1) = \tilde{P}_t$. Finalement, on a montré :

Proposition 3.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} A$, soit $X = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K$ sa fibre générique et $Y = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} F$ sa fibre spéciale. Si $P, Q \in X(K)$, deux K-points de la fibre générique, sont R-équivalents (sur K), alors leurs spécialisations respectives, $\tilde{P}, \tilde{Q} \in Y(F)$, sont elles aussi R-équivalentes (sur F). C'est-à-dire que la flèche de spécialisation $X(K) = \mathfrak{X}(A) \to Y(F)$ induit une flèche $X(K)/R \to Y(F)/R$.*

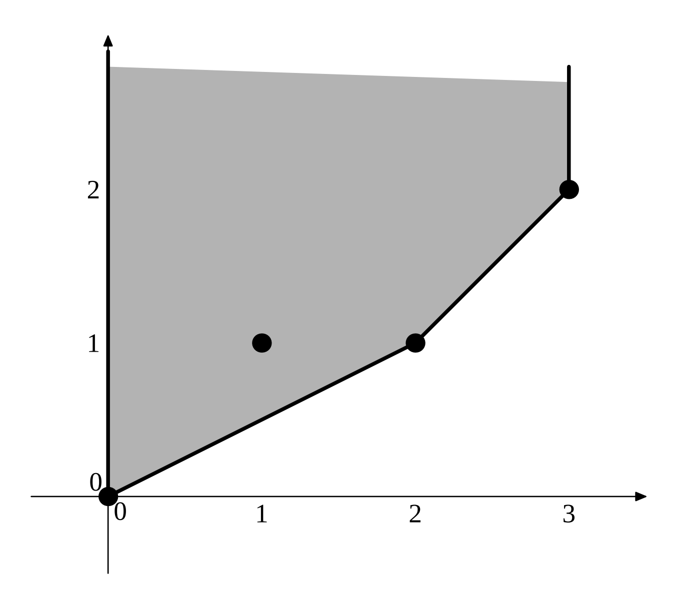
4 Étude d'un exemple

On considère $A = \mathbb{Z}_p$, de sorte que $K = \mathbb{Q}_p$ et $F = \mathbb{F}_p$, avec la valuation $v(p) = 1$.

On étudiera le morphisme $f\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ donné par $(x:y) \mapsto (x^3 : px^2y : pxy^2 : p^2y^3)$. Celui-ci relie le point $f(1:0) = (1:0:0:0)$ au point $f(0:1) = (0:0:0:p^2) = (0:0:0:1)$. Il s'agit d'une cubique gauche dans

$\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$, notamment, f est (au-dessus de $\mathbb{Q}_p$) un isomorphisme sur son image ; laquelle a pour équations $pz_0z_2 = z_1^2$, $z_0z_3 = z_1z_2$ et $z_1z_3 = pz_2^2$.

On peut représenter ainsi le polygone de Newton de f :



On voit notamment qu'il a trois sommets, qui correspondent donc à trois points-étapes. Le premier et le dernier sont respectivement la spécialisation de $f(1:0)$ et celle de $f(0:1)$, autrement dit $(1:0:0:0)$ et $(0:0:0:1)$. Le point-étape correspondant au sommet $(2,1)$ du polygone de Newton est donné par le monôme en xy^2, soit $(0:0:1:0)$.

Les deux arêtes non verticales du polygone déterminent deux morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_p}$, reliant les points-étapes successifs. Le premier est $(x:y) \mapsto (x^2 : 0 : y^2 : 0)$ et le second est $(x:y) \mapsto (0:0:x:y)$. Ils vérifient bien les équations $z_1^2 = 0$, $z_0z_3 = z_1z_2$ et $z_1z_3 = 0$, obtenues en réduisant modulo p celles de l'image de f ; mais on remarquera que ces équations réduites ne définissent pas l'image des morphismes considérés.

On peut donner une vision plus abstraite de cette spécialisation. Si on considère l'application rationnelle $F\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{Z}_p}$ donnée par $(x:y) \mapsto (x^3 : px^2y : pxy^2 : p^2y^3)$, son ouvert de définition est le complémentaire du point $p = x = 0$ (et, par ailleurs, quand on la restreint à la fibre spéciale $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$, elle est constante de valeur $(1:0:0:0)$ sauf en ce point, $(0:1)$, où elle n'est pas définie). Pour résoudre cette indétermination, on considère un éclatement $\mathfrak{E}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ au point en question, disons par $\lambda x = px'$ où $(\lambda : x')$ sont les coordonnées introduites sur le diviseur exceptionnel. L'image réciproque

6

de la fibre spéciale $p = 0$ a deux composantes irréductibles : le diviseur exceptionnel $p = x = 0$, et le diviseur $\lambda = 0$. Sur ce dernier, l'application F est toujours constante (de valeur $(1 : 0 : 0 : 0)$) pour $x \neq 0$; sur le diviseur exceptionnel, F est donné pour $\lambda \neq 0$ par $(0 : 0 : x' : y)$, ou, ce qui revient au même, $(0 : 0 : 1 : \lambda y)$ — on retrouve donc le morphisme reliant le point-étape du milieu au point-étape final. Mais on n'a pas encore un morphisme défini sur la totalité de $\mathfrak{E}$, puisqu'il reste le point d'indétermination $\lambda = x = 0$. Un second éclatement en ce point est nécessaire pour résoudre également cette indétermination.

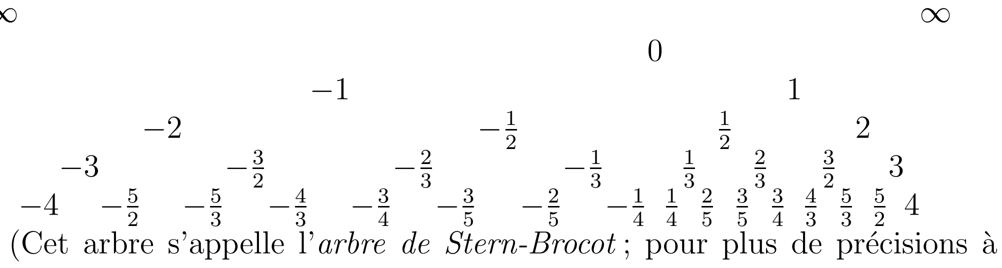
5 Traduction en termes d'éclatements

(Nous tentons, sans justifier précisément nos affirmations, d'expliquer, à la suite de l'exemple précédent, comment voir la résolution des morphismes par des suites d'éclatement, en fonction des pentes apparaissant dans le polygone de Newton de f.)

De façon générale, nous pouvons dire ceci : le fait que F soit non constante sur la fibre spéciale $p = 0$ équivaut à l'existence d'une arête horizontale (i.e. de pente nulle) au polygone de Newton de f ; le fait qu'elle ne soit pas définie en $p = x = 0$ équivaut à l'existence d'arêtes de pente positive, et le fait qu'elle ne soit pas définie en $p = y = 0$ équivaut à l'existence d'arêtes de pente négative. Éclater en $p = x = 0$ fait « apparaître » une éventuelle arête de pente 1, en ce sens que l'éclaté de F sera non constant le long du diviseur exceptionnel si et seulement si il existe une telle arête. (De même, éclater en $p = y = 0$ fait apparaître une éventuelle arête de pente -1.) Après un éclatement en $p = x = 0$, disons par $\lambda x = px'$, un nouvel éclatement en $p = x' = 0$ révèle l'existence d'une arête de pente 2, tandis qu'un éclatement en $\lambda = x = 0$ révèle l'existence d'arêtes de pente $\frac{1}{2}$. Après un éclatement en $p = x' = 0$, deux nouveaux éclatements révèlent l'existence d'arêtes de pente $\frac{3}{2}$ et 3 ; tandis qu'après un éclatement en $\lambda = x = 0$, on pourra révéler l'existence d'arêtes de pente $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Et ainsi de suite. C'est-à-dire qu'en éclatant à chaque fois en $(1 : 0)$ et en $(0 : 1)$ les diviseurs issus des éclatements précédents, on fait apparaître successivement les arêtes du polygone de Newton ayant toutes les pentes rationnelles possibles, suivant le schéma suivant, dans lequel chaque nombre a pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs des nombres écrits au-dessus de lui, immédiatement à

gauche et immédiatement à droite :



(Cet arbre s'appelle l'*arbre de Stern-Brocot* ; pour plus de précisions à ce sujet, ainsi qu'au rapport avec les fractions continuées, cf. R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, *Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science*, 2d edition, Addison-Wesley 1994, p. 116ss.)

La mesure de complexité, autrement dit le nombre d'éclatements *successifs* qu'il faut utiliser pour résoudre une pente s, est égale à la somme des entiers intervenant dans la décomposition de s suivant l'algorithme d'Euclide.

Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques

David A. Madore

15 avril 2005

1 Introduction

Lorsque V est une variété projective lisse définie sur un corps k, on s'intéresse notamment au quotient $V(k)/R$ de l'ensemble $V(k)$ des points rationnels de V par la relation de R-équivalence : deux points $x, x' \in V(k)$ sont dits R-équivalents lorsqu'ils peuvent être reliés par une chaîne d'images de $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite finie $x = x_0, \ldots, x_\ell = x'$ de points rationnels et une suite finie $f_1, \ldots, f_\ell$ de morphismes $\mathbb{P}^1 \to V$ définis sur k tels que pour chaque i on ait $f_i(0) = x_{i-1}$ et $f_i(1) = x_i$.

Nous nous penchons ici sur le cas des hypersurfaces cubiques V (cf. [1]), de dimension au moins 2, sur des corps k dont on supposera toujours que la caractéristique ne divise pas 6 ; on sait qu'au moins pour k algébriquement clos on a alors $V(k)/R$ réduit à un élément : une démonstration de ce fait sera rappelée plus bas. On souhaiterait obtenir le même résultat sur d'autres corps, notamment les corps p-adiques[1] dans le cas de bonne réduction.

Swinnerton-Dyer a prouvé ([2], théorème 1) que pour V une surface cubique lisse définie sur k fini, le quotient $V(k)/R$ est un singleton ; sur une extension algébrique infinie de k, il n'est pas difficile d'obtenir le même résultat pour V singulière, et donc, par sections planes, pour V hypersurface cubique de dimension ≥ 2 quelconque.

[1]Remarquons en revanche que $V(k)/R$ n'est *pas* toujours un singleton lorsque k est le corps $\mathbb{R}$ des réels : ainsi la surface cubique d'équation projective $X(X+T)(X-T) = (Y^2 + Z^2)T$ a-t-elle manifestement deux composantes connexes sur les réels, et leurs points ne peuvent donc pas être R-équivalents ; elle n'est pas lisse, mais la surface cubique $X(X+T)(X-T) + 10^{-3}XYZ = (Y^2 + Z^2)T$, elle, l'est, et a encore deux composantes connexes.

Sur un corps p-adique (avec $p \geq 5$), lorsqu'on a affaire à une hypersurface cubique lisse ayant bonne réduction, on peut essayer de déformer les résultats obtenus sur les corps finis (et leurs extensions algébriques infinies) grâce aux résultats du type de ceux contenus dans [3] (proposition 2) et [4] ; ceux-ci nécessitent que les courbes rationnelles $f_1, \ldots, f_\ell$ que l'on trouve sur l'hypersurface soient *très libres*, c'est-à-dire que $f_i^* T_V$ soit ample : on prouvera que, sur un corps infini, il est possible de faire en sorte qu'elles le soient. Ceci étant, on peut effectivement étendre la situation depuis le corps résiduel ; malheureusement, l'utilisation faite des corps infinis ne permet d'obtenir de résultat sur la R-équivalence que pour une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ ayant un corps résiduel infini. En revanche, au niveau de l'équivalence *rationnelle*, c'est-à-dire du groupe de Chow en dimension 0, on obtient bien un résultat sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Précisément, le résultat principal prouvé ici est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit K un corps p-adique avec $p \geq 5$, et soit V une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2 sur K ayant bonne réduction. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur V, modulo équivalence rationnelle, est nul.*

Par « ayant bonne réduction » on entend que V est la fibre générique $\mathfrak{V} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} K$ d'une hypersurface cubique lisse $\mathfrak{V}$ sur $\mathcal{O}$ (l'anneau des entiers de K).

En particulier, on a le corollaire suivant, qui peut être intéressant par lui-même :

Corollaire 1.2. *Soit V une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2 définie sur un corps de nombres K. Alors en presque toute place p de K le groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur $V_p = V \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_p$, modulo équivalence rationnelle, est nul.*

2 Remarques élémentaires sur les hypersurfaces cubiques

De façon générale, on renvoie à [1] pour les généralités sur ce sujet.

Soit V une hypersurface cubique lisse (dans $\mathbb{P}^N$) sur un corps k infini dont la caractéristique ne divise pas 6. Pour $x \in V(k)$ (ou plus généralement

$x \in V(k')$ pour k' une extension quelconque de k) on note $\Pi(x)$ l'hyperplan tangent à V en x, et $C(x)$ l'intersection de V avec $\Pi(x)$: c'est une hypersurface cubique dans $\Pi(x)$ dont x est un point singulier.

On aura occasionnellement besoin du résultat suivant :

Lemme 2.1. *Si x et y sont deux points (géométriques) distincts de V, la droite (xy) (de $\mathbb{P}^N$) est incluse dans V si et seulement si on a $x \in C(y)$* et *$y \in C(x)$. Dans le cas contraire, la droite en question coupe V en x, en y et en un troisième point éventuellement confondu avec x (exactement lorsque $y \in C(x)$) ou avec y (exactement lorsque $x \in C(y)$).*

Démonstration. Dire $y \in C(x)$ signifie que la droite (xy) est contenue dans $\Pi(x)$, c'est-à-dire qu'elle est tangente à V en x. De même, on a $x \in C(y)$ si et seulement si la droite (xy) est tangente à V en y. Lorsque (xy) est incluse dans V, elle est certainement tangente à V en chacun de ses points. Pour ce qui est de la réciproque, la restriction à (xy) de la forme cubique définissant V ne peut s'annuler avec multiplicité (au moins) 2 en deux points distincts que si elle est nulle : ceci montre que si (xy) est tangente à V en x et en y alors elle est contenue dans V. Le dernier point est clair. □

Il existe ([1], II.12.13) une unique application rationnelle $V \times V \dashrightarrow V$ (définie sur k), notée $(u, v) \mapsto u \circ v$ (symétrique en les deux variables), définie *au moins* pour les couples (u, v) tels que $u \notin C(v)$ *ou* $v \notin C(u)$, et telle que pour tout couple de cette sorte on ait $u, v, u \circ v$ alignés ($\sigma_u \colon v \mapsto u \circ v$ est appelée la symétrie par rapport à u). (Cf. aussi le lemme 2.1.)

Par ailleurs, on rappelle ([1], II.12.9) qu'un point x de V est dit *de type général* lorsque $C(x)$ est réduite et géométriquement irréductible et que le point singulier $x \in C(x)$ n'est pas conique (c'est-à-dire, cf. [1], II.12.5, que $C(x)$ n'est pas un cône cubique de sommet x). Dans ces circonstances, on sait ([1], *loc. cit.*) que la variété $C(x)$ est rationnelle (sur le corps k) — en particulier, tout ouvert de Zariski non vide de $C(x)$ contient des points rationnels.

Lemme 2.2. *L'ensemble des points (géométriques) de V de type général est un ouvert de Zariski* non vide*.*

Démonstration. Il est facile de voir que l'ensemble en question est un ouvert. Le point essentiel est de voir que, sur un corps k algébriquement clos, toute hypersurface cubique lisse V possède un point de type général (résultat cité dans [1], II.12.12, sans démonstration). Mais en appliquant successivement le

théorème de Bertini pour trouver une section hyperplane lisse, on est ramené au cas où V est une surface. Or, dans ce cas, un point qui n'est pas de type général est nécessairement situé sur une des 27 droites tracées sur V, et il existe donc bien des points de type général. □

L'existence d'un point k-rationnel de type général implique ([1], II.12.11) que V est unirationnelle (sur le corps k), c'est-à-dire qu'il existe une application rationnelle, finie et dominante, d'un espace projectif vers V — et notamment que tout ouvert de Zariski de V possède des points rationnels. En fait, Kollár a prouvé récemment ([5]) que l'hypothèse d'existence d'un point de type général est superflue : toute hypersurface cubique lisse V sur un corps k quelconque est k-unirationnelle dès lors qu'elle possède un point k-rationnel. Cependant, nous n'utiliserons pas ce résultat.

On aura par ailleurs besoin du résultat facile suivant :

Lemme 2.3. *On suppose maintenant que V est une hypersurface cubique irréductible, non nécessairement lisse, sur k, toujours de caractéristique ne divisant pas* 6*. Si les hyperplans tangents à V (vus comme hyperplans dans $\mathbb{P}^N$) en tous les points géométriques passent par un même point O, alors V est un cône cubique de sommet O.*

Démonstration. Écrivons l'équation de V dans un système $(x_1, \ldots, x_N)$ de coordonnées affines d'origine O, soit $a + L(x_1, \ldots, x_N) + Q(x_1, \ldots, x_N) + C(x_1, \ldots, x_N) = 0$, avec L une forme linéaire, Q une forme quadratique et C une forme cubique, cette dernière étant non nulle. Dire que l'hyperplan tangent à V en $(x_1, \ldots, x_N)$ passe par O signifie que $L(x_1, \ldots, x_N) + 2Q(x_1, \ldots, x_N) + 3C(x_1, \ldots, x_N) = 0$. Si c'est vrai pour tout point de V, c'est que $a + L(x_1, \ldots, x_N) + Q(x_1, \ldots, x_N) + C(x_1, \ldots, x_N)$ divise $L(x_1, \ldots, x_N) + 2Q(x_1, \ldots, x_N) + 3C(x_1, \ldots, x_N)$. Or ceci implique clairement que a, L et Q sont nuls, donc que V est un cône cubique de sommet O. □

(Pour un résultat plus général, voir [6].)

3 Familles de courbes rationnelles

Si X est une variété projective, $h\colon \mathbb{P}^1 \to X$ un morphisme et $B \subseteq \mathbb{P}^1$ un sous-schéma fini, on dit que h est *libre sur B* lorsque le fibré $h^*T_X \otimes I_B$ est nef sur $\mathbb{P}^1$ (i.e. est somme directe de $\mathcal{O}(a_i)$ avec $a_i \geq 0$), où I_B est le faisceau d'idéaux définissant B. Naturellement, dans cette définition, seul compte le

4

degré de B : on dit que h est libre lorsqu'il est libre sur $\varnothing$, et très libre lorsqu'il est libre sur un point (ou, si on préfère, h^*T_X est ample).

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui affirme que si on a une famille de courbes rationnelles qui dominent, de façon séparable, une variété lisse, en gardant un point fixe, alors la plupart de ces courbes sont libres sur ce point :

Proposition 3.1. *Soient k un corps algébriquement clos, M une variété intègre sur k, et X une variété projective lisse sur k. Soit $x_0 \in X$. Soit enfin $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \to X$ un morphisme* séparable[2] *(donc dominant) tel que $F(M \times \{0\}) = \{x_0\}$. Alors il existe un ouvert de Zariski* non vide *M^0 de M tel que pour $p \in M^0$ le morphisme $F_p\colon \mathbb{P}^1 \to X$ soit très libre.*

Démonstration. Ce résultat découle essentiellement de [4], II.3.10 (première affirmation) ; mais pour la commodité du lecteur, nous en redonnons une démonstration complète.

Considérons le schéma $Q = \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0)$ paramétrant les morphismes $\mathbb{P}^1 \to X$ envoyant 0 sur x_0. D'après la propriété universelle de ce schéma, F détermine un morphisme $f\colon M \to Q$ tel que F s'écrive $F(p,t) = \mathrm{ev}(f(p),t)$, où $\mathrm{ev}\colon Q \times \mathbb{P}^1 \to X$ est le morphisme d'évaluation.

Par hypothèse, il existe un ouvert non vide de $M \times \mathbb{P}^1$ en tout point duquel la différentielle de $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \to X$ est surjective. Il existe donc un point $t_0 \in \mathbb{P}^1$, qu'on peut manifestement supposer différent de 0 et de ∞, et un ouvert M^0 non vide de M tels que pour tout $p \in M^0$ la différentielle de F soit surjective en (p, t_0). On va montrer que ce M^0 convient, c'est-à-dire que F_p est libre sur 0 (donc très libre) pour $p \in M^0$.

Soit $p \in M^0$. La différentielle de $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \to X$ est surjective en (p, t_0). On a donc également la surjectivité de la différentielle de $\mathrm{ev}\colon Q \times \mathbb{P}^1 \to X$ en $(f(p), t_0)$.

Remarquons à présent que $\mathrm{ev}\colon Q \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}) \to X$ peut se factoriser[3] à travers le morphisme $\mathrm{ev}_{t_0}\colon Q \to X$ donné par $\mathrm{ev}_{t_0} = \mathrm{ev}(\cdot, t_0)$. En effet, si on considère la flèche $Q \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}) \to Q$ qui envoie $([h], t)$ sur $[h \circ \tau_t]$, où $\tau_t\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est défini par $\tau_t(t') = tt'/t_0$, alors manifestement ev est la

[2]Un morphisme depuis une variété intègre est dit séparable lorsqu'il existe un point auquel sa différentielle est surjective, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle est surjective au point générique.

[3]On comparera cette technique de factorisation avec la première phrase de la démonstration de II.3.10 dans [4]. Le fait de considérer des morphismes depuis $\mathbb{P}^1$ et non une courbe de genre plus élevé est ici crucial.

composée de cette flèche par ev_{t_0}. Puisque la différentielle de ev est surjective en $(f(p), t_0)$ (et que τ_{t_0} est l'identité), il s'ensuit que la différentielle de ev_{t_0} est elle-même surjective en $f(p)$.

Mais alors F_p est libre sur 0, c'est-à-dire que $F_p^* T_X \otimes I_0$ (avec T_X le fibré tangent à X et I_0 le faisceau d'idéaux associé au sous-schéma fermé $\{0\}$ de $\mathbb{P}^1$) est nef (est somme de faisceaux inversibles nefs). Cela découle de la description de la différentielle donnée dans [4], II.3.4, et du fait qu'un fibré E sur $\mathbb{P}^1$ est somme de faisceaux inversibles nefs si et seulement si on peut trouver une section de E ayant n'importe quelle valeur prescrite en un point donné, ici t_0.

Ceci montre que F_p est très libre, pour $p \in M^0$. C'est ce qu'on voulait démontrer. □

4 R-équivalence libre sur une hypersurface cubique

Dans cette section, V désigne une hypersurface cubique lisse sur un corps k infini de caractéristique ne divisant pas 6.

4.1 Conditions sur les points

On considère à présent un point $x \in V(k)$ de type général.

Lemme 4.1. *Il existe un ouvert de Zariski U non vide de $C(x)$ tel que pour $z \in U$ on ait $x \notin C(z)$.*

Démonstration. La condition $x \notin C(z)$ est certainement ouverte. Le point important est qu'il existe un tel z. Mais puisque x n'est pas conique sur $C(x)$, il existe une droite de $\Pi(x)$ passant par x qui n'est pas contenue dans $C(x)$: elle coupe V en x (avec multiplicité 2) et un autre point z (avec multiplicité 1), ce qui donne $x \notin C(z)$ (voir le lemme 2.1). □

Pour un tel z, l'application rationnelle $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bien définie en (z, x) et on a $z \circ x = x$ (puisque la droite passant par x et z coupe V avec multiplicité 2 en x et 1 en z).

Considérons maintenant un point $y \in V(k)$ tel que $y \notin C(x)$ (toujours avec $x \in V(k)$ de type général).

En particulier, puisque $y \notin C(x)$, on peut dire qu'il existe un ouvert de Zariski U' non vide de $C(x)$ tel que pour $z \in U'$ on ait $y \notin C(z)$ (« non vide » car il contient x lui-même). Pour un tel z, l'application rationnelle $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bien définie en (z, y).

Soit $z \in U'$: comme nous l'avons dit, $u \mapsto u \circ y$ est définie en z ; et alors $u \mapsto z \circ (u \circ y)$ est également définie en z et y vaut y. La différentielle de cette application est une application linéaire $T_z V \to T_y V$, qui est par ailleurs un isomorphisme (car $u \mapsto z \circ (u \circ y)$ a pour réciproque $v \mapsto (z \circ v) \circ y$, au voisinage de y). En particulier, on en déduit une injection $T_z C(x) \to T_y V$ qui va nous intéresser tout particulièrement.

Lemme 4.2. *Soit $\xi \in T_y V$ non nul. Alors il existe un ouvert U'_1 non vide de $C(x)$ (contenu dans U') tel que pour $z \in U'_1$, l'image de l'application $T_z C(x) \to T_y V$ définie ci-dessus ne contienne* pas *ξ.*

Démonstration. Considérons $z \in U'$. On convient de voir $T_z C(x)$ et $T_y V$ comme sous-espaces de $T_z \mathbb{P}^N$ et $T_y \mathbb{P}^N$ respectivement. Commençons par remarquer que si $\eta \in T_z C(x) \subseteq T_z \mathbb{P}^N$ et $\eta' \in T_y V \subseteq T_y \mathbb{P}^N$ son image par l'application $T_z C(x) \to T_y V$ considérée, alors la droite passant par z de vecteur directeur η et la droite passant par y de vecteur directeur η' sont coplanaires. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si P est le plan défini par z, η et y, alors tout se passe dans ce plan (en ce sens que la symétrie de deux points de $V \cap P$ peut être définie entièrement par des constructions dans P, et précisément par la symétrie par la cubique plane $v \cap P$), donc η' est forcément lui-même dedans.

Considérons maintenant la droite de $\mathbb{P}^N$ passant par y et dirigée par ξ (vu comme élément de $T_y \mathbb{P}^N$), et soit a son intersection avec $\Pi(x)$ (on a supposé que y n'est pas sur $C(x)$, donc, pas dans $\Pi(x)$). Nous n'affirmons pas que a est un point de V.

Si $z \in U'$ est tel que ξ soit dans l'image de $T_z C(x)$ dans $T_y V$, disons qu'il soit l'image d'un certain $\eta \in T_z C(x)$, alors, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, la droite passant par z et dirigée par η et la droite passant par y et dirigée par ξ sont dans un même plan P. Ainsi, la droite passant par z et dirigée par η est à la fois dans le plan P et dans l'hyperplan $\Pi(x)$; c'est donc précisément l'intersection de P et de $\Pi(x)$, qui, par définition de a est la droite (za). On a donc montré que (pour un $z \in U'$ tel que ξ soit dans l'image de $T_z C(x)$) la droite (za) est tangente à $C(x)$ en z. C'est-à-dire que a est situé sur l'hyperplan tangent à $C(x)$ en z (vu « à l'ancienne » comme une sous-variété linéaire projective de $\mathbb{P}^N$).

Si on suppose par l'absurde que pour *tout* $z \in U'$ on ait ξ dans l'image de $T_z C(x)$ dans $T_y V$, alors tous les hyperplans tangents à $C(x)$ en ces points, et donc *tous* les hyperplans tangents à $C(x)$, passent par a. Mais ceci prouve que $C(x)$ est un cône de sommet a (lemme 2.3). Or on a supposé le contraire (c'est-à-dire que x était de type général).

C'est donc qu'il existe des — et donc un ouvert non vide U'_1 de — points z de $C(x)$ tels que l'image de $T_z C(x)$ dans $T_y V$ ne contienne pas ξ. Ce qu'il fallait démontrer. □

4.2 Construction d'une famille de courbes

On suppose toujours que $x \in V(k)$ est de type général, et on suppose que $x' \in V(k)$ est tel que $x' \notin C(x)$. On suppose de plus donné un morphisme $f\colon \mathbb{P}^1 \to V$ tel que $f(1) = x$ et $f(0) = x'$.

Si la différentielle de f est constamment nulle, f se factorise par le morphisme de Frobenius ; quitte à le factoriser suffisamment, on peut supposer qu'il existe t_0 tel que $f'(t_0) \neq 0$, i.e. il existe un vecteur non nul, disons ξ, dans l'image de $T_{t_0}\mathbb{P}^1$ dans $T_y V$, où $y = f(t_0)$. On peut de plus supposer que $y \notin C(x)$ (car $x' \notin C(x)$).

D'après ce qu'on a vu précédemment, on peut trouver un ouvert de Zariski U_0 non vide de $C(x)$ tel que

1. Si $z \in U_0$ alors $x \notin C(z)$ (d'après le lemme 4.1) ; ainsi, $(u, v) \mapsto u \circ v$ est défini en (z, x), avec $z \circ x = x$.
2. Si $z \in U_0$ alors $x' \notin C(z)$ (puisque $x' \notin C(x)$, donc certainement il existe beaucoup de $z \in C(x)$ tels que $x' \notin C(z)$) ; ainsi, $(u, v) \mapsto u \circ v$ est défini en (z, x'), et aussi en $(z, z \circ x')$, avec $z \circ (z \circ x') = x'$; par conséquent, $u \mapsto z \circ (u \circ x')$ est défini en z, et donc au voisinage de z.
3. Si $z \in U_0$ alors $y \notin C(z)$ (mêmes remarques).
4. La différentielle de $u \mapsto z \circ (u \circ y)$ envoie $T_z C(x)$ sur un hyperplan de $T_y V$ qui ne contient pas ξ (d'après le lemme 4.2).
5. L'ouvert U_0 est isomorphe à un ouvert W de l'espace projectif $\mathbb{P}^{N-2}$, disons par $\varphi\colon W \to U_0$ défini sur le corps de base k (ceci est possible car $C(x)$ est rationnel sur k comme on l'a déjà signalé).

Fixons maintenant $z \in U_0(k)$.

Définissons une application rationnelle $F\colon C(x) \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$ par $F(u, t) = z \circ (u \circ f(t))$.

D'après les propriétés énumérées ci-dessus pour U_0, on voit que F est définie au moins en $(u, 1)$ pour tout $u \in U_0$ (où elle vaut x), ainsi qu'en $(z, 0)$ (où elle vaut x') et en (z, t_0) (où elle vaut y).

Par ailleurs, la différentielle de F en (z, t_0) est une application linéaire $T_zC(x) \oplus T_{t_0}\mathbb{P}^1 \to T_yV$ qui est un isomorphisme (il y a égalité des dimensions, et la surjectivité est assurée par le fait que ξ, base de $T_{t_0}\mathbb{P}^1$, ne tombe pas dans l'image de $T_zC(x)$ dans T_yV). Cela implique que F est séparable, et notamment dominante.

4.3 Modification de la famille de courbes

On reprend les notations de la section précédente.

On a choisi un isomorphisme $\varphi\colon W \to U_0$ avec W un ouvert de $\mathbb{P}^{N-2}$ et U_0 ouvert de $C(x)$ aux propriétés miraculeuses. Puisque $z \in U_0(k)$, quitte à reparamétrer, on peut supposer que $O \in W$ et $\varphi(O) = z$, où par O, on entend le point $(1\colon 0\colon \cdots : 0)$ de $\mathbb{P}^{N-2}$. Par ailleurs, on appellera 0 le point $(1 : 0)$ de $\mathbb{P}^1$ et 1 le point $(1 : 1)$.

Posons $G(u, t) = F(\varphi(u), t)$: ceci définit une application rationnelle $G\colon \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$ séparable telle que $G(u, 1) = x$ pour tout u (d'un certain voisinage de O dans $\mathbb{P}^{N-2}$) et que $G(O, 0) = x'$.

Soit $\mu\colon \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-2}$ l'application rationnelle définie par $\mu((x_0\colon x_1\colon \cdots : x_{N-2}), (\lambda_0\colon \lambda_1)) = (\lambda_0 x_0\colon \lambda_1 x_1\colon \cdots : \lambda_1 x_{N-2})$ (autrement dit, l'homothétie sur la première variable, de centre $(1\colon 0\colon \cdots : 0)$, d'hyperplan à l'infini $x_0 = 0$, et de rapport donné par la seconde variable). Il est clair que μ est défini au moins en $(O, 1)$ (où elle vaut O) et en $(O, 0)$ (où elle vaut également O).

Soit alors $H\colon \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$ définie par $H(v, t) = G(\mu(v, t), t)$: H est définie au moins en $(O, 1)$ et en $(O, 0)$. On voit que $H(v, 1) = x$ pour tout v d'un certain voisinage de O et que $H(v, 0) = x'$ également pour tout v d'un certain voisinage de O ; et H domine V car c'était le cas de F, et même, plus précisément, H est séparable.

Quitte à restreindre le domaine des v, on sait qu'on peut trouver un ouvert W' non vide de $\mathbb{P}^{N-2}$ tel que $H(v, t)$ soit défini, pour $v \in W'$, pour tout t : on a alors affaire à un morphisme séparable $H\colon W' \times \mathbb{P}^1 \to V$.

D'après la proposition 3.1, on sait alors qu'il existe v (qu'on peut supposer défini sur k car on a affaire à un ouvert d'un espace projectif !) pour lequel $h = H_v$ est très libre, et il vérifie toujours $h(1) = x$ et $h(0) = x'$.

On a donc montré le résultat suivant :

9

Proposition 4.3. *Soit V une hypersurface cubique lisse sur un corps k infini de caractéristique ne divisant pas 6. Soient $x, x' \in V(k)$ deux points, avec x de type général et $x' \notin C(x)$. On suppose qu'il existe $f\colon \mathbb{P}^1 \to V$ (défini sur k) tel que $f(1) = x$ et $f(0) = x'$. Alors il existe $h\colon \mathbb{P}^1 \to V$ qui vérifie la même condition avec de plus h^*T_V ample (autrement dit, h est « très libre »).*

Plus précisément, il existe un ouvert W^0 non vide de $\mathbb{P}^{N-2}$ et un morphisme $H\colon W^0 \times \mathbb{P}^1 \to V$ dominant (et même séparable), tel que pour tout $v \in W^0$ on ait $H_v\colon \mathbb{P}^1 \to V$ très libre.

4.4 Conclusion

Proposition 4.4. *Soit V une hypersurface cubique lisse, possédant un point rationnel de type général, sur un corps k infini de caractéristique ne divisant pas 6, et x et x' deux points rationnels distincts de V. On suppose que x et x' peuvent être reliés par une chaîne (d'images de) $\mathbb{P}^1$ sur k (c'est-à-dire qu'ils sont R-équivalents). Alors ils peuvent être reliés par une chaîne de $\mathbb{P}^1$ très libres.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour deux points x et x' directement R-équivalents (i.e. il existe un $f\colon \mathbb{P}^1 \to V$ défini sur k tel que $f(1) = x'$ et $f(0) = x$). Si x et x' sont de type général et que la droite (xx') n'est pas incluse dans V (de sorte que $x' \notin C(x)$ ou $x \notin C(x')$ d'après le lemme 2.1, et, quitte à les permuter, on peut supposer que c'est la première condition qui vaut), alors on a fini d'après la proposition 4.3.

Sinon, on va trouver un automorphisme birationnel σ de V (défini en x et x') tel que les points $\sigma(x)$ et $\sigma(x')$ soient de type général et ne soient pas reliés par une droite contenue dans V. Précisément, σ sera la symétrie par rapport à un point y de V.

Dans un premier temps, on veut montrer qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U_1 de V tel que pour $y \in U_1$ (un point géométrique), si σ désigne la symétrie par rapport à y, alors σ est définie en x et en x', et la droite reliant $\sigma(x)$ et $\sigma(x')$ (dans $\mathbb{P}^N$) n'est pas incluse dans V.

Considérons d'abord le cas où déjà la droite (xx') est contenue dans V, et prouvons l'existence, dans ce cas-là, de U_1 ouvert non vide comme indiqué.

Pour cela, on veut prouver d'abord qu'il existe des plans Σ passant par x et par x' tels que l'intersection de Σ avec V soit la réunion de la droite (xx') et d'une conique *lisse*. Pour le voir, considérons le morphisme ϕ qui à un point y de V non situé sur (xx') associe le plan $\Sigma = (xx'y)$, considéré comme

un point de la variété, disons $\mathbb{E}$, des plans de $\mathbb{P}^N$ passant par (xx') ; il s'agit de voir que ce morphisme a une fibre lisse, ou, ce qui revient au même, que sa fibre générique est lisse, ou encore qu'il est lisse au-dessus du point générique de $\mathbb{E}$. Si on complète le morphisme ϕ par une projection quelconque sur la droite (xx') (autrement dit, à un point y de V on associe le point de $\mathbb{E} \times \mathbb{P}^1$ défini par le couple formé du plan $\Sigma = (xx'y) = \phi(y)$ et de la projection de y sur (xx')), on obtient manifestement un morphisme fini de degré 2 défini sur un ouvert de V ; comme la caractéristique du corps k est différente de 2, ce morphisme, et donc le morphisme ϕ, est génériquement lisse. Il existe donc une fibre Σ, et même un ouvert (dans $\mathbb{E}$) de telles fibres, comme nous l'affirmions : l'intersection de Σ avec V est réunion de la droite (xx') et d'une conique lisse Γ. Puisque V est lisse en x et x', on peut supposer que Σ n'est tangent à V ni en x ni en x', donc que ces deux points ne sont pas sur Γ. Et si y est un point de Γ non situé sur (xx'), l'automorphisme σ de symétrie par y est bien défini en x et en x', et la droite reliant les points $\sigma(x)$ et $\sigma(x')$ n'est pas contenue dans V. Ceci montre l'existence de U_1 non vide comme nous l'affirmions.

Si la droite (xx') n'est *pas* incluse dans V, il est encore plus facile d'assurer l'existence de U_1 non vide : de nouveau on regarde les plans Σ contenant la droite (xx') et non tangents à V ni en x ni en x', et la seule situation problématique est celle où $\Sigma \cap V$ est formé de trois droites, mais même dans ce cas une des trois droites doit ne passer ni par x ni par x' et en prenant y sur cette droite hors des intersections on a ce qu'on voulait. L'existence de U_1 non vide est donc prouvée dans tous les cas.

Reste à assurer encore la condition de type général. Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un ouvert de Zariski U_2 non vide de points y de V tels que la symétrie σ par rapport à y soit définie en x et x' et envoie ceux-ci sur des points de type général. Mais on sait qu'il y a un ouvert dense de points de type général (lemme 2.2) : il existe donc un ouvert dense de points y tels que $y \circ x$ soit défini et soit de type général ; et un ouvert de points y tels que $y \circ x'$ soit défini et soit de type général. Leur intersection donne l'ouvert U_2 recherché.

Finalement, en prenant l'intersection U_3 des ouverts non vides U_1 et U_2, on arrive bien à trouver des points y géométriques tels que la symétrie σ par rapport à y envoie x et x' sur deux points $\sigma(x)$ et $\sigma(x')$ de type général et non reliés par une droite contenue dans V. Mais on peut faire mieux : il existe des points y *rationnels* dans U_3 puisque V est k-unirationnelle (parce qu'on a supposé l'existence d'un point rationnel de type général — ce qui n'est pas

nécessaire si on utilise [5]).

Par hypothèse, il existe un $f\colon \mathbb{P}^1 \to V$ défini sur k tel que $f(1) = x'$ et $f(0) = x$. On a une application rationnelle $\sigma \circ f$ (au-dessus de k), définie au moins au voisinage de 1 (et y valant $\sigma(x')$) et au voisinage de 0 (et y valant $\sigma(x)$), qui s'étend en un morphisme $\mathbb{P}^1 \to V$ valant $\sigma(x')$ en 1 et $\sigma(x)$ en 0, avec, par construction, $\sigma(x')$ et $\sigma(x)$ de type général et non situés sur une droite contenue dans V.

D'après la proposition 4.3, il existe donc $H\colon W^0 \times \mathbb{P}^1 \to V$ dominant, où W^0 est un ouvert de $\mathbb{P}^{N-2}$, tel que $H(v,1) = \sigma(x)$ et $H(v,0) = \sigma(x')$ pour tout v de W'. En composant avec σ^{-1} (et quitte à restreindre W^0 encore plus pour être défini partout), on obtient la même conclusion avec x et x', ce qui permet de conclure ce qu'on veut, grâce à la proposition 3.1. □

5 R-équivalence sur une surface cubique

5.1 Exposition

Dans toute cette section, V est une *surface* cubique, non nécessairement lisse, définie sur un corps k infini de caractéristique ne divisant pas 6, définie par $f \in k[X,Y,Z,T]$ un polynôme homogène de degré 3 (non nul) à quatre indéterminées.

Or la donnée d'un polynôme homogène f de degré 3 (à quatre indéterminées) équivaut à la donnée d'une forme trilinéaire ($\varphi\colon k^4 \times k^4 \times k^4 \to k$) totalement symétrique : on a $f(P) = \varphi(P,P,P)$ et $df(P)\cdot Q = 3\varphi(P,P,Q)$ et $d^2f(P)\cdot(Q\otimes R) = 6\varphi(P,Q,R)$.

La surface V est réductible (sur un corps k' extension de k) lorsque f peut s'écrire comme produit f_1f_2 de deux polynômes homogènes (à coefficients dans k'), disons f_1 de degré 1 et f_2 de degré 2. Sur la forme φ cela correspond à la relation $3\varphi(P,Q,R) = f_1(P)\varphi_2(Q,R) + f_1(Q)\varphi_2(R,P) + f_1(R)\varphi_2(P,Q)$ (avec φ_2 forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique f_2).

Lorsque V est réductible, de deux choses l'une : ou bien f s'écrit comme le produit de trois facteurs linéaires $f = \ell_1\ell_2\ell_3$ définis sur un corps k', et V est l'union (dans $\mathbb{P}^1(k')$) de trois plans ; le degré $[k' : k]$ est alors au plus égal à 3 (pour k' un corps minimal de définition de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Ou bien f_2 définit dans $\mathbb{P}^3_k$ une quadrique irréductible, et alors f_1 et f_2 sont (i.e. peuvent être trouvés) à coefficients dans k : V est l'union d'un plan et d'une quadrique tous deux définis sur k.

Lorsque ce n'est pas le cas, V est (géométriquement[4]) irréductible.

On dit qu'un point $P = (X : Y : Z : T) \in V(k')$ (pour un corps k' extension de k) est un point (au moins) *double* de V lorsque $\varphi(P, P, Q) = 0$ pour tout Q (cette condition ne dépend pas du représentant choisi pour P dans k'^4, d'où le léger abus de notation). On dit que P est *triple* lorsque $\varphi(P, Q, R) = 0$ pour tous Q, R (ou, ce qui suffit, $\varphi(P, Q, Q) = 0$ pour tout Q). Un point est singulier si et seulement si il est au moins double ; s'il n'y a pas de tel point (sur aucune extension k' de k), la surface V est dite non singulière. Manifestement, lorsque c'est le cas, elle est irréductible.

La droite (dans $\mathbb{P}^3_k$) joignant deux points (au moins) doubles de V est entièrement contenue dans V. (En effet, $f(\lambda P+\mu Q) = \lambda^3 f(P)+3\lambda^2\mu\varphi(P, P, Q) + 3\lambda\mu^2\varphi(P, Q, Q) + \mu^3 f(Q)$, et l'hypothèse garantit que tous les termes sont nuls.) De même, la droite joignant un point triple à un point quelconque de V est entièrement contenue dans V ; autrement dit, l'existence d'un point triple P équivaut à supposer que V est un cône de sommet P.

Notons de surcroît que si P et Q sont deux points doubles, alors la droite qui les relie (qui, on vient de le voir, est entièrement contenue dans V) soit n'a pas d'autre point double qu'eux soit est entièrement constituée de points doubles ; en effet, si R est un point quelconque (de k'^4, pour k' une extension quelconque de k), on a $\varphi(\lambda P + \mu Q, \lambda P + \mu Q, R) = 2\lambda\mu\varphi(P, Q, R)$ puisque P et Q sont doubles, et cette expression est soit constamment nulle soit ne s'annule que pour $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. De même, si P, Q, R sont trois points doubles non colinéaires, et que le plan qu'ils définissent n'est pas entièrement contenu dans V, alors ce plan coupe V suivant exactement trois droites (les trois droites reliant les trois points), et notamment il n'y a pas d'autre point double situé dans ce plan.

On peut alors distinguer les cas suivants (cf. [7]) :

1. f s'écrit comme produit $f = \ell_1\ell_2\ell_3$ de trois facteurs linéaires (sur une certaine extension k'/k de degré au plus 3) : V est la réunion de trois plans (non nécessairement distincts). L'intersection de ceux-ci est formée de points triples (soit un unique point triple, soit une droite, soit un plan si les trois plans sont confondus).
2. f s'écrit comme produit $f = f_1 f_2$ avec $f_1 = \ell_1$ linéaire et f_2 quadratique, tous deux définis sur k : V est la réunion d'une quadrique

[4]Le terme « géométriquement » est nécessaire pour recouvrir le cas de la décomposition comme union de trois plans sur lesquels agit transitivement le groupe de Galois absolu de k. Tous les autres cas de réductibilité géométrique sont déjà réductibles sur le corps k.

irréductible (éventuellement singulière) et d'un plan. L'intersection de ceux-ci est formée de points doubles de V, et il n'y a pas de point triple.

3. f est irréductible et possède un unique point triple P, nécessairement à coordonnées dans k : V est alors un cône de sommet P. Il se peut que V n'ait aucun point exactement double, ou qu'elle en ait précisément une droite (nécessairement définie sur k).
4. V est irréductible, ne possède pas de point triple, mais possède une infinité de points (exactement) doubles. Ceux-ci forment alors une droite (nécessairement définie sur k).
5. V est irréductible et possède exactement quatre points (exactement) doubles, non coplanaires.
6. V est irréductible et possède exactement trois points (exactement) doubles, non alignés.
7. V est irréductible et possède exactement deux points (exactement) doubles.
8. V est irréductible et possède exactement un point exactement double.
9. V est non singulière.

5.2 R-équivalence

On cherche maintenant à étudier la R-équivalence sur V dans chacun des cas dégagés ci-dessus.

Manifestement, si la droite reliant P et Q est contenue dans V, alors P et Q sont R-équivalents. Notamment, tous les points d'un cône sont R-équivalents (s'il existe un point triple dans $V(k)$, alors tous les points sont R-équivalents).

Lorsque deux k-points quelconques de V sont R-équivalents, c'est-à-dire que $V(k)/R$ est un singleton, on dira que V est R-triviale.

Il est prouvé dans [2] (théorème 1) que, sur un corps fini, ou, par conséquent, une extension algébrique infinie d'un corps fini, une surface cubique *non singulière* V quelconque est R-triviale.

Nous nous proposons d'expliquer pourquoi ceci reste vrai pour une surface cubique quelconque. On suppose dorénavant que k est une extension algébrique infinie d'un corps fini (de caractéristique ne divisant pas 6).

Nous aurons besoin du fait que, sur une extension algébrique k d'un corps fini (ou plus généralement sur un corps C_1), une surface cubique ayant un

k-point singulier est R-triviale ([11], lemme 3). À l'inverse, pour les surfaces cubiques V dont tous les k-points sont lisses, l'ensemble $V(k)/R$ des classes de R-équivalence est un invariant k-birationnel (voir [1], remarque II.14.4), c'est-à-dire notamment que si deux surfaces cubiques sont k-birationnellement équivalentes et si l'une est R-triviale, l'autre l'est aussi : en effet, cela vaut sauf peut-être pour un fermé strict (on a un isomorphisme entre deux ouverts non vides, et il transporte la R-équivalence), mais comme les classes de R-équivalence sont denses pour la topologie de Zariski ([1], théorème II.13.1(i) ; voir théorème II.14.3), les points de ce fermé sont R-équivalents aux autres. Notamment, une surface cubique k-rationnelle[5] est R-triviale.

On reprend maintenant les cas distingués précédemment :

1. La réunion de trois plans est certainement R-triviale car leur intersection est définie sur k.
2. Si V est réunion d'un plan et d'une quadrique, alors V est R-triviale : deux points quelconques du plan ou deux points quelconques de la quadrique sont R-équivalents ; enfin, l'intersection des deux, qui est une conique éventuellement dégénérée, possède des points sur k (puisque k est extension algébrique d'un corps fini).
3. Si V est un cône, nous avons déjà observé que deux points quelconques sont R-équivalents (en passant par le sommet du cône).
4. Si V possède une droite, définie sur k, formée de points (exactement) doubles, cette droite contient un k-point, et on a alors vu que V est R-triviale.
5. Lorsque V est irréductible et possède exactement quatre points doubles, alors V est k-rationnelle : ceci est montré dans [8], §9 ou dans [9], lemme 1.1(ii). Par conséquent, V est R-triviale.
6. Lorsque V est irréductible et possède exactement trois points doubles, deux choses sont possibles : ou bien $V(k) = \varnothing$ (ce qui ne peut pas d'ailleurs se produire pour k extension algébrique infinie d'un corps fini), ou bien V est k-rationnelle ; voir [7], §6,9 ou bien [9], lemme 1.1(iii). Dans le premier cas, il n'y a rien à montrer, et dans le second on a vu que V est R-triviale.

[5]Lorsque la surface a des k-points singuliers, l'hypothèse faite sur k est importante : sinon, un contre-exemple est fourni par la surface cubique sur $\mathbb{R}$ d'équation $T(X^2+Y^2+Z^2) = X^3$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, dont le $\mathbb{R}$-point singulier $X = Y = Z = 0$, isolé dans la topologie réelle, est une classe de R-équivalence à lui tout seul.

7. Lorsque V est irréductible et possède exactement deux points doubles, de deux choses l'une :
   - Soit ces deux points sont définis sur k. Dans ce cas, on a un point singulier défini sur k, et on a vu que V est R-triviale.
   - Soit ces deux points sont définis sur une extension quadratique k' de k et conjugués par l'action de Galois. Dans ce cas, d'après [9], théorème 2.2(a,b) (quitte à appliquer deux fois l'opération), V est k-rationnellement équivalente à une surface cubique non singulière W, et on est ramené à ce cas.
8. Lorsque V est irréductible et possède exactement un point double, ce point est défini sur k, et on a vu que V est R-triviale.
9. Enfin, lorsque V est non singulière, c'est le résultat de Swinnerton-Dyer que nous avons cité.

Dans tous les cas, nous avons donc prouvé :

Proposition 5.1. *Soit V une surface cubique (non nécessairement lisse) sur un corps k extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas* 6. *Alors deux points rationnels quelconques de V sont R-équivalents.*

6 Déformation et fin

6.1 Déformation d'une courbe libre

Soit maintenant K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète *complet* $\mathcal{O}$ dont on note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal et $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma projectif *lisse* sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$, dont on note $X = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} K$ la fibre générique et $X_k = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} k$ la fibre spéciale. Soient $x, x' \in X(K) = \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ deux points rationnels de K, dont on note $\tilde{x}, \tilde{x}' \in X_k(k)$ la spécialisation (réduction modulo $\mathfrak{m}$). Soit $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X_k$ un k-morphisme tel que $f(0) = \tilde{x}$ et $f(\infty) = \tilde{x}'$, et tel que $f^*T_{X_k}$ (fibré sur $\mathbb{P}^1_k$) soit ample, c'est-à-dire que f est très libre. On se propose de montrer qu'il existe $F\colon \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} \to \mathfrak{X}$ vérifiant $F(0) = x$ et $F(\infty) = x'$ et dont la fibre spéciale soit f.

On applique la proposition 2 de [3] (voir aussi [4], II.1.7 et II.3.5.4) : celle-ci montre que f peut s'étendre à $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ (en respectant x et x') si $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_{X_k})(-2)) = 0$ (remarquons qu'ici, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est isomorphe à k comme k-module), ce qui est précisément l'hypothèse que f est très libre : en fait,

l'obstruction au foncteur des déformations infinitésimales de f relativement à $\{\tilde{x}, \tilde{x}'\}$ est précisément un élément de $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_{X_k})(-2))$, donc l'hypothèse nous permet d'étendre f à $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$, et, plus généralement, l'annulation du même H^1 (tensorisé avec $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ qui est toujours isomorphe à k) permet d'étendre f à $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}$ une fois qu'on l'a étendu à $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$. Finalement, on peut donc étendre f à $\mathcal{O}$ (supposé complet) en un morphisme F comme recherché, relativement à $\{x, x'\}$.

On a donc prouvé :

Proposition 6.1. *Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète* complet *$\mathcal{O}$ de corps résiduel k, et soit $\mathfrak{X}$ un schéma projectif* lisse *sur $\mathcal{O}$, dont on note X la fibre générique et X_k la fibre spéciale. Soient x et x' deux K-points de X. Si les spécialisations*[6] *$\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ de x et x' sont R-équivalentes par des $\mathbb{P}^1$ très libres, alors x et x' sont R-équivalents.*

6.2 Conclusion

D'après la proposition 5.1 ci-dessus, on a :

Proposition 6.2. *Soit V une hypersurface cubique*[7] *sur un corps k extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas* 6*. Alors deux points rationnels quelconques de V sont R-équivalents.*

Combinons maintenant ce résultat avec la proposition 4.4. Sur une extension algébrique infinie d'un corps fini (de caractéristique ne divisant pas 6), une hypersurface cubique lisse a toujours un point de type général : en effet, sur un corps algébriquement clos, ils forment un ouvert non vide (lemme 2.2) de la variété irréductible V, qui a donc des points sur un corps fini suffisamment grand d'après les estimations de Lang-Weil. Si l'on préfère, on peut appliquer le résultat de [5]. On en déduit :

Proposition 6.3. *Soit V une hypersurface cubique lisse sur un corps k extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas* 6*. Alors deux points rationnels quelconques de V sont R-équivalents par une chaîne de $\mathbb{P}^1$ très libres.*

En combinant la proposition 6.3 avec la proposition 6.1, on obtient immédiatement :

[6] Si ces spécialisations sont confondues, on demande qu'il y passe un $\mathbb{P}^1$ très libre.

[7] Non nécessairement lisse, mais on n'utilisera que le cas lisse.

17

Proposition 6.4. *Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète* complet $\mathcal{O}$ *dont le corps résiduel k est une extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas* 6*, et soit V une hypersurface cubique lisse dans sur K ayant bonne réduction. Alors deux points rationnels quelconques de V sont R-équivalents, et notamment rationnellement équivalents.*

Reste à expliquer comment on peut classiquement en déduire le théorème 1.1. Pour cela, soit K un corps p-adique avec $p \geq 5$, de corps résiduel $\mathbb{F}$ et V une hypersurface cubique lisse sur K ayant bonne réduction ; en particulier, V a un K-point, disons a. Commençons par montrer que tout K-point x de V sur K est rationnellement équivalent à a. On considère deux extensions algébriques infinies k_1 et k_2 de $\mathbb{F}$ dont les degrés sont premiers entre eux, disons, pour fixer les idées, $[k_1 : \mathbb{F}] = \ell_1^\infty$ et $[k_2 : \mathbb{F}] = \ell_2^\infty$ avec ℓ_1, ℓ_2 premiers distincts. Si K_1 et K_2 sont les extensions non ramifiées de K ayant k_1 et k_2 respectivement pour corps résiduels, la proposition 6.4 s'applique à K_1 et à K_2. Notamment, elle montre que a et x sont rationnellement équivalents tant sur K_1 que sur K_2 ; et donc déjà sur des extensions de degré fini de K contenues dans K_1 et K_2 respectivement. Ceci signifie (cf. [10], §1.4) que pour certains entiers i_1 et i_2, on a $\ell_1^{i_1}([x] - [a]) = 0$ et $\ell_2^{i_2}([x] - [a]) = 0$. Mais alors $[x] - [a] = 0$ d'après une relation de Bézout entre $\ell_1^{i_1}$ et $\ell_2^{i_2}$, c'est-à-dire que x et a sont rationnellement équivalents. Et ceci s'applique encore à toute extension finie K' de K : si x est un point géométrique de V de corps résiduel K', alors il est encore rationnellement équivalent, sur $V_{K'}$, à $a \otimes_K K'$. En poussant par le morphisme fini $p \colon V_{K'} \to V$ (cf. [10], *loc. cit.*), on en conclut que $[x] - d[a] = 0$ où $d = [K' : K]$. Autrement dit, tout point fermé de V est rationnellement équivalent à un multiple de a, ce qui conclut.

Références

[1] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[2] H. P. F. Swinnerton-Dyer, « Universal Equivalence for Cubic Surfaces over Finite and Local Fields », *Istituto Nazionale di Alta Mathematica Francesco Severi, Symposia Mathematica*, **24** (1981), 111-143.

[3] S. Mori, « Projective manifolds with ample tangent bundles », *Annals of Mathematics*, **110** (1979), 593-606.

[4] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[5] J. Kollár, « Unirationality of Cubic Hypersurfaces », preprint, disponible sur `xxx.lanl.gov` comme `math.AG/0005146`.

[6] A. Holme, *Embeddings, projective invariants and classifications*, Universidad Nacional Autónoma de México, Monografías del Insituto de Matemáticas (1979).

[7] B. Segre, « On Arithmetical Properties of Singular Cubic Surfaces », *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 84–91.

[8] B. Segre, « A Complete Parametric Solution of Certain Homogeneous Diophantine Equations of Degree n in $n + 1$ Variables », *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 46–55.

[9] D. F. Coray & M. A. Tsfasman, « Arithmetic on Singular Del Pezzo Surfaces », *Proc. London Math. Soc.* (3), **57** (1988), 25–87.

[10] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).

[11] D. Madore, « Une observation sur la R-équivalence sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques », in *Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (2005).

Approximation faible aux places de bonne réduction sur les surfaces cubiques sur les corps de fonctions

David A. Madore

15 avril 2005

Abstract

We prove that a smooth cubic surface over the field of functions of a curve on an algebraically closed field of characteristic 0 satisfies weak approximation at places of good reduction. The method used imitates that employed by Swinnerton-Dyer ([10]) in the case of number fields.

Résumé

On démontre que les surfaces cubiques lisses sur les corps de fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 vérifient l'approximation faible aux places de bonne réduction. La méthode utilisée imite celle employée par Swinnerton-Dyer ([10]) dans le cas des corps de nombres.

MSC (2000) : 14J26, 14G05, 14H05, 11D25

Introduction

Si X est une variété lisse et géométriquement connexe sur le corps de fonctions $K = k(\Gamma)$ d'une courbe sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0, et S un ensemble fini de places de K (identifiées à des points de Γ, supposée propre et lisse), on dit que X vérifie l'approximation

faible aux places de S lorsque l'image de la flèche diagonale naturelle $X(K) \to \prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ est dense, où $\hat{K}_v$ est le complété de K en la place v et $X(\hat{K}_v)$ est muni de la topologie v-adique ; si ce résultat vaut pour tout ensemble S fini de places de K, on dira tout simplement que X vérifie l'approximation faible. On renvoie à [1] pour une discussion générale de l'approximation faible sur les corps de fonctions d'une courbe.

Il est tentant de conjecturer que l'approximation faible vaut pour toute variété projective lisse et géométriquement rationnellement connexe sur K (voir [5] pour une définition du terme « rationnellement connexe » ; rappelons que les surfaces géométriquement rationnellement connexes sont les surfaces géométriquement rationnelles). Le meilleur résultat connu[1] dans cette direction est dû à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [5], IV.6.10), mais il ne donne qu'une version affaiblie de l'approximation (essentiellement la surjectivité sur la fibre spéciale, c'est-à-dire l'approximation à l'ordre zéro) et seulement aux places de bonne réduction. Il est également à mettre en perspective avec un résultat plus récent de Graber, Harris et Starr ([2]), assurant que X a toujours un K-point. Par ailleurs, on peut également remarquer que l'approximation faible vaut lorsque X est constante, c'est-à-dire provient d'une variété rationnellement connexe définie sur k (cf. [6] (4.1.2.4)).

En des termes plus géométriques, la question revient à s'intéresser à un morphisme propre $p \colon \mathscr{X} \to \Gamma$, dont la fibre générale est lisse et rationnellement connexe : le théorème de Graber, Harris et Starr assure que p a automatiquement une section, et celui de Kollár, Miyaoka et Mori permet alors de trouver, étant donnés un nombre fini de points dans des « bonnes » fibres (lisses et rationnellement connexes), une section passant par ces points. L'approximation faible demande à pouvoir prescrire en outre le comportement infinitésimal de la section aux points considérés.

Parmi les cas où l'on sait que l'approximation faible vaut (y compris aux places de mauvaise réduction ; cf. [1] pour une démonstration de ces différents résultats), on peut citer les surfaces lisses fibrées en coniques sur une conique, ou encore les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$, c'est-à-dire les surfaces de Del Pezzo de degré 4. (Rappelons, cf. [5] III.2.1, que toute surface projective lisse, géométriquement connexe et géométriquement rationnelle est birationnelle soit à une surface fibrée en coniques sur une co-

[1] Depuis, Hassett et Tschinkel ont obtenu le résultat général de l'approximation faible aux places de bonne réduction pour toutes les variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes.

nique soit à une surface de Del Pezzo de degré $1 \leq d \leq 9$.) Le cas des surfaces de Del Pezzo de degré $d \geq 5$ étant trivial (car elles sont K-rationnelles dès qu'elles ont un K-point, cf. [5] III.3), le cas $d = 3$, c'est-à-dire des surfaces cubiques, apparaît comme le premier cas intéressant.

La question de savoir si l'approximation faible vaut pour une surface cubique lisse sur K, au moins aux places de bonne réduction, a été posée par J. Kollár dans son exposé au congrès européen à Budapest en juillet 1996. Le but de cet article est de répondre positivement à cette question, en prouvant le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et K le corps de fonctions d'une courbe Γ sur k. Soit X une surface cubique lisse sur K et $S \subset \Gamma$ un ensemble fini de places de bonne réduction (en une surface cubique lisse) de X. Alors, en notant $\hat{K}_v$ le complété de K en un $v \in S$, l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow \prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ est dense (où l'image est munie du produit des topologies v-adiques).*

Dans une première partie, on démontre le résultat dans le cas où l'ensemble S est réduit à une seule place v avec l'amélioration consistant à prouver la densité v-adique de n'importe quelle classe de R-équivalence (proposition 7) ; pour cela, on commence par obtenir un résultat de surjectivité sur la fibre spéciale (proposition 4) avant d'améliorer l'approximation à n'importe quel ordre. Dans une deuxième partie, on montre comment ce résultat en une seule place permet d'obtenir l'approximation faible en n'importe quel ensemble fini de places de bonne réduction.

Les arguments utilisés ici (et notamment celui de la deuxième partie) sont inspirés de ceux employés précédemment par Swinnerton-Dyer dans [10] pour prouver un résultat comparable dans le cas, techniquement plus difficile, des surfaces cubiques sur les corps de nombres.

On renvoie à [9] pour les propriétés générales des surfaces cubiques.

1 Approximation en une seule place de bonne réduction

Notations et hypothèses pour la section : Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, Γ une courbe intègre sur k, qu'on peut toujours supposer propre et lisse, et $K = k(\Gamma)$ son corps des fonctions. Soit

$v \in \Gamma$ une place de K, identifiée à la valuation normalisée correspondante sur K. Soit $A = \{f \in K : v(f) \geq 0\}$ l'anneau des entiers correspondant, anneau de valuation discrète dont on note $\mathfrak{m} = \{f \in K : v(f) \geq 1\}$ l'idéal maximal et π une uniformisante ($\mathfrak{m} = \pi A$) ; le corps résiduel $A/\pi A$ est canoniquement isomorphe à k. Soit $\hat{A}$ le complété de A pour sa valuation v, et $\hat{K} = \mathrm{Frac}(\hat{A})$ le corps des fractions de $\hat{A}$.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3_A$ une surface cubique sur A dont on note $X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, k$ la fibre spéciale. On suppose que X est lisse.

On dispose sur $\mathbb{P}^3(\hat{K}) = \mathbb{P}^3(\hat{A})$ de la topologique v-adique, pour laquelle un système fondamental de voisinages de $(T_0 : T_1 : T_2)$ est formé par les ensembles des $(T'_0 : T'_1 : T'_2)$ vérifiant $v(T'_i - T_i) \geq m$ (pour $i = 0, 1, 2$) avec $m \in \mathbb{N}$. Cette topologie détermine une topologie v-adique sur $X(\hat{K}) = \mathcal{X}(\hat{A})$.

On se propose d'étudier la question de savoir si l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow X(\hat{K})$ est dense. On aura également besoin de considérer la flèche naturelle, de spécialisation, $X(\hat{K}) \to Y(k)$ (déduite de celle de $\mathbb{P}^3(\hat{K}) \to \mathbb{P}^3(k)$).

Nous supposons Y lisse (i.e. v est une place de bonne réduction).

Définitions générales : Lorsque $P \in X(K)$ est un K-point de X, de spécialisation $\tilde{P} \in Y(k)$, on appellera $\mathcal{C}(P)$ l'intersection de $\mathcal{X}$ avec son plan tangent en P (vu comme point de $\mathcal{X}(A)$), dont la fibre générale (intersection de X avec son plan tangent en P) sera notée $C(P)$ et la fibre spéciale $\tilde{C}(\tilde{P})$ (intersection de Y avec son plan tangent en $\tilde{P}$). Lorsque P (resp. $\tilde{P}$) n'est situé sur aucune droite de X (resp. Y), la courbe cubique $C(P)$ (resp. $\tilde{C}(\tilde{P})$) est irréductible et a P (resp. $\tilde{P}$) comme seul point singulier, qui est soit un point double ordinaire soit un point de rebroussement ; dans le cas contraire, $C(P)$ (resp. $\tilde{C}(\tilde{P})$) est, réductible, formée soit de la réunion de trois droites (éventuellement concourantes en P (resp. $\tilde{P}$), qu'on appelle alors un « point d'Eckardt ») soit de la réunion d'une droite et d'une conique lisse.

Toujours considérant $P \in X(K)$, on peut identifier sans perte de généralité à $\mathbb{P}^2_A$ le plan tangent à $\mathcal{X}$ en P, dont on notera $(T_0 : T_1 : T_2)$ les coordonnées homogènes, et on peut supposer que P a (sur A) les coordonnées $(1 : 0 : 0)$. L'équation de $\mathcal{C}(P)$ s'écrit alors $T_0\, q(T_1, T_2) + c(T_1, T_2) = 0$, où $q \in A[T_1, T_2]$ est une forme quadratique et $c \in A[T_1, T_2]$ une forme cubique, dont on note $\tilde{q} \in k[T_1, T_2]$ et $\tilde{c} \in k[T_1, T_2]$ les réductions respectives. L'hypothèse selon laquelle P (resp. $\tilde{P}$) n'est pas situé sur une droite de X (resp. Y) se traduit en le fait que q et c (resp. $\tilde{q}$ et $\tilde{c}$) sont non nulles et sans

zéro commun.

On définit une application rationnelle explicite de $\mathbb{P}^1_A$ vers $\mathcal{C}(P)$, qui dans certaines conditions favorables (que nous précisons ci-dessous) est un paramétrage, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rl} F_P\colon & \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(P) \subset \mathbb{P}^2_A \\ & (\lambda : \mu) \mapsto (-c(\lambda,\mu) : \lambda q(\lambda,\mu) : \mu q(\lambda,\mu)) \end{array}$$

Lorsque P n'est pas situé sur une droite de X (droite géométrique, c'est-à-dire définie sur la clôture algébrique de K), ce qui assure que $\mathcal{C}(P)$ est géométriquement irréductible, on a une flèche rationnelle dans l'autre direction :

$$\begin{array}{rl} G_P\colon & \mathbb{P}^2_A \supset \mathcal{C}(P) \dashrightarrow \mathbb{P}^1_A \\ & (T_0 : T_1 : T_2) \mapsto (T_1 : T_2) \end{array}$$

Pour éviter toute ambiguïté, on notera f_P et g_P (resp. $\tilde{f}_P$ et $\tilde{g}_P$) les restrictions de F_P et G_P à la fibre générique (resp. à la fibre spéciale).

On se permettra par ailleurs d'utiliser encore les notations ci-dessus lorsque P sera un point défini sur une extension finie K' de K ou sur $\hat{K}$: il faudra alors bien entendu comprendre que les objets définis le seront sur K' ou $\hat{K}$, sur la fermeture intégrale A' de A dans K' ou la complétion $\hat{A}$, ou sur k.

On appellera $X_{\text{bon}} \subseteq X$ l'ouvert de Zariski de X formé du complémentaire des droites tracées (au sens géométrique) sur X et des points P de X pour lesquels $C(P)$ a en P un point de rebroussement : autrement dit, pour $P \in X_{\text{bon}}(\bar{K})$, la courbe $C(P)$ est une cubique ayant un seul point singulier, P, qui est un point double ordinaire. On appellera Y_{bon} l'ouvert correspondant pour la fibre spéciale : Y_{bon} est l'ouvert de Y dont les points $\tilde{P} \in Y_{\text{bon}}(k)$ sont ceux pour lesquels $\tilde{C}(\tilde{P})$ est une cubique ayant un seul point singulier $\tilde{P}$, qui est un point double ordinaire. Un point $P \in X$ dont la spécialisation $\tilde{P}$ est dans Y_{bon} est lui-même dans X_{bon} (en fait, $X_{\text{bon}} \cup Y_{\text{bon}}$ est ouvert dans $\mathcal{X}$).

Il nous faut remarquer que X_{bon} n'est pas vide (au sens géométrique) : cela peut se justifier, par exemple, en prenant un pinceau de Lefschetz de sections de X (cf. [4], théorème 2.5). Ce raisonnement (géométrique) montre aussi bien que Y_{bon} n'est pas vide, naturellement.

Le corps $K = k(\Gamma)$ est un corps C_1 au sens de Lang, ce qui implique notamment qu'il existe un point K-rationnel sur X : on peut donc choisir $P \in X(K)$. Notre but ultime est de construire un P arbitrairement proche

d'un $P^* \in X(\hat{K})$ donné (et même, vérifiant certaines conditions techniques supplémentaires qui seront explicitées plus loin), mais dans un premier temps, cherchons à montrer qu'il existe des $P \in X(K)$ se spécialisant en n'importe quel $\tilde{P} \in Y(k)$ donné.

On sait au moins que les points K-rationnels de X sont denses au sens de Zariski, car une surface cubique est K-unirationnelle dès qu'elle possède un point K-rationnel ([7] ; ici, on peut aussi appliquer [9] II.12.11 et IV.30.1). À présent, prouvons le lemme suivant, qui permet de remplacer un point $P \in X_{\mathrm{bon}}(K)$ par un point dont la spécialisation est moins insalubre :

Lemme 2. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Soit $P \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$. Alors pour tout point $\tilde{Q}$* lisse *sur $\tilde{C}(\tilde{P})$, il existe un $Q \in (C(P) \cap U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$.*

Démonstration. Soit donc $P \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$. Alors l'application $f_P \colon \mathbb{P}^1_K \to C(P)$, définie plus haut, est un paramétrage rationnel de $C(P)$. Soit $\tilde{Q}$ un point lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$ (ce qui implique notamment que $\tilde{Q}$ est différent de $\tilde{P}$) ; et soit $Q^* \in (C(P) \cap U \cap X_{\mathrm{bon}})(\hat{K})$ un point qui se spécialise en $\tilde{Q}$: un tel point existe d'après le lemme de Hensel (il n'est pas difficile de s'assurer qu'on peut le choisir dans $U \cap X_{\mathrm{bon}}$ puisqu'il ne faut pour cela éviter qu'un nombre fini de points sur $C(P)$). On pose alors $\delta^* = g_P(Q^*) \in \mathbb{P}^1(\hat{K})$ (notons que $g_P(Q^*)$ est bien défini car Q^* est différent de P puisque déjà sa spécialisation $\tilde{Q}$ diffère de $\tilde{P}$). On peut choisir une suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{P}^1(K)$ tels que $\delta_i \to \delta^*$ (au sens de la topologie v-adique). Puisque $f_P(\delta^*) = Q^*$ (ce qui vaut car P n'est pas situé sur une droite de X), on voit qu'en posant $Q_i = f_P(\delta_i)$ (ce qui a certainement un sens pour i assez grand) on a $Q_i \to Q^*$ au sens v-adique. On peut en conclure que, pour i assez grand, la spécialisation $\tilde{Q}_i$ de Q_i coïncide avec la spécialisation $\tilde{Q}$ de Q^*, et que Q_i est dans l'ouvert de Zariski $U \cap X_{\mathrm{bon}}$. Posant alors $Q = Q_i$, on a trouvé un point $Q \in (C(P) \cap U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$ comme souhaité : sa spécialisation est $\tilde{Q}$. ☐

Lemme 3. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Soit $P \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$. Alors pour tout point $\tilde{Q}$ de $\tilde{C}(\tilde{P})$ (non nécessairement lisse), il existe un $Q \in (U \cap X_{\mathrm{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$.*

Démonstration. Si $\tilde{Q}$ est lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$, le résultat est déjà démontré ci-dessus (lemme 2), et si $\tilde{Q} = \tilde{P}$, il est trivial. Il s'agit donc de considérer le cas où $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$ sont deux points singuliers distincts de $\tilde{C}(\tilde{P})$. Mais dans ce cas, la droite qui les joint est nécessairement contenue dans $\tilde{C}(\tilde{P})$ donc

dans Y. Soit $\tilde{R}$ un point lisse de $\tilde{C}(\tilde{P})$ situé sur cette droite : alors elle (la droite) est contenue dans $\tilde{C}(\tilde{R})$, donc notamment $\tilde{Q}$ est dans $\tilde{C}(\tilde{R})$, et par ailleurs il y est lisse (car le plan tangent à Y en $\tilde{P}$ est le plan tangent à Y en $\tilde{Q}$, et ce n'est *pas* le plan tangent à Y en $\tilde{R}$ puisque $\tilde{R}$ est lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$). Deux applications successives du lemme 2 montrent d'abord qu'il existe $R \in (C(P) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{R}$, puis $Q \in (C(R) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$. □

Proposition 4. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Alors pour tout $\tilde{P} \in Y(k)$, il existe $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{P}$.*

Démonstration. Soit $R \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$: un tel point existe car, comme nous l'avons signalé plus haut, $X(K)$ est dense au sens de Zariski sur X. On considère la courbe $\tilde{C}(\tilde{R})$ sur Y, d'une part, et de l'autre la courbe[2] $\tilde{D}(\tilde{P})$ formée des points $\tilde{M} \in Y(k)$ tels que $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{M})$: ces deux courbes se rencontrent en au moins un point $\tilde{Q}$ (vu que $\tilde{C}(\tilde{M})$ est une section plane). Il vérifie donc $\tilde{Q} \in \tilde{C}(\tilde{R})$ et $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{Q})$. Deux applications successives du lemme 3 montrent d'abord l'existence d'un $Q \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ tel que Q se spécialise en $\tilde{Q}$ puis d'un $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ tel que P se spécialise en $\tilde{P}$. □

Cette proposition est un cas particulier du résultat général dû à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [5], IV.6.10) mentionné dans l'introduction, mais ici démontré dans ce cas par des méthodes très différentes, particulières au cas des surfaces cubiques et beaucoup plus simples.

Nous décrivons maintenant une construction essentielle. Considérons dans un premier temps un point $M \in X_{\text{bon}}(K)$ tel que $\tilde{M} \in Y_{\text{bon}}(k)$ (l'existence d'un tel M est garantie par la proposition 4). On a introduit précédemment une application rationnelle $F_M : \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(M)$ définie par

$$F_M : \quad \begin{aligned} &\mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(M) \subset \mathbb{P}^2_A \\ &(\lambda : \mu) \mapsto (-c(\lambda, \mu) : \lambda q(\lambda, \mu) : \mu q(\lambda, \mu)) \end{aligned}$$

Dire que $\tilde{q}$ et $\tilde{c}$ n'ont pas de zéro projectif commun signifie précisément que l'application rationnelle F_M est un morphisme. C'est le cas ici puisque $\tilde{M}$ est dans Y_{bon} donc n'est situé sur aucune droite de Y. On a donc non seulement une application rationnelle mais même un morphisme $F_M : \mathbb{P}^1_A \to \mathcal{C}(M)$.

[2] C'est bien une courbe car il n'est pas possible que tous les plans tangents à Y passent par un même point, sans quoi Y serait un cône ayant ce point pour sommet (cf. par exemple [8], lemme 5).

On appellera τ_1 et τ_2 deux points de $\mathbb{P}^1_K(K)$ tels que $\tilde{f}_M(\tilde{\tau}_1) = \tilde{f}_M(\tilde{\tau}_2) = \tilde{M}$ avec $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$ et que $f_M(\tau_1)$ et $f_M(\tau_2)$ (que nous appellerons respectivement M_1 et M_2) soient tous deux distincts de M (ils sont alors automatiquement distincts l'un de l'autre). Autrement dit, M_1 et M_2 sont deux points K-rationnels sur $C(M)$, proches de M, sur l'une et l'autre branche sur $\hat{K}$ de cette cubique qui a en M un point double ordinaire.

On introduit maintenant l'application rationnelle de composition habituelle sur les surfaces cubiques : $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}, (N_1, N_2) \mapsto N_1 \bullet N_2$ envoie deux points N_1 et N_2 de $\mathcal{X}$ en position générale sur le troisième point $N_1 \bullet N_2$ d'intersection de la droite $(N_1N_2) \subset \mathbb{P}^3$ avec $\mathcal{X}$. On sait que $N_1 \bullet N_2$ est définie (au sens d'application des deux variables, sur tout $\operatorname{Spec} A$) au moins lorsque N_1 et N_2 ont des spécialisations $\tilde{N}_1$ et $\tilde{N}_2$ distinctes et que la droite qui les relie n'est pas contenue dans Y ou, ce qui revient au même, lorsque $\tilde{N}_2$ n'est pas situé sur $\tilde{C}(\tilde{N}_1)$ ni $\tilde{N}_1$ sur $\tilde{C}(\tilde{N}_2)$.

Soit $P \in X(K)$ tel que $\tilde{P} \notin \tilde{C}(\tilde{M})$ (en fait, dans la suite, ce sera P qui sera choisi en premier, puis M vérifiant certaines conditions décrites plus loin, mais pour l'instant M comme P font partie des données de la construction). On introduit l'application rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad & \mathbb{P}^1_A \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{X} \\ & (u, v) \mapsto (((P \bullet F_M(u)) \bullet M_1) \bullet F_M(v)) \bullet M_2 \end{aligned}$$

Comme $\tilde{P}$ est différent de $\tilde{M} = \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2$ et que $\tilde{P} \bullet \tilde{M}$ est lui aussi différent de $\tilde{M}$, et comme $\tilde{M}$ n'est pas situé sur une droite de Y, on voit que φ, comme composée d'applications rationnelles successivement définies aux points considérés[3], est définie au moins au point $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ de la fibre spéciale $\mathbb{P}^2_k$ de $\mathbb{P}^2_A$, et $\varphi(\tau_1, \tau_2) = P$. Par ailleurs, au moins pour $v \in \mathbb{P}^1_A$ dans un voisinage de Zariski de τ_2, on a $\varphi(\tau_1, v) = (P \bullet F_M(v)) \bullet M_2$ et, au moins pour $u \in \mathbb{P}^1_A$ dans un voisinage de Zariski de τ_1, on a $\varphi(u, \tau_2) = (P \bullet F_M(u)) \bullet M_1$: on voit donc, si on calcule les deux différentielles partielles de φ en $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$, en réduction à k, qu'elles sont non nulles et non colinéaires, puisque la courbe $\tilde{C}(\tilde{M})$ a deux branches distinctes en $\tilde{M}$ (et que l'application $\tilde{N} \mapsto (\tilde{P} \bullet \tilde{N}) \bullet \tilde{M}$ est un automorphisme birationnel). Ainsi, la différentielle (totale) de φ en $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ est bijective en réduction à k. On a donc prouvé :

Construction 5. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors il existe $\varphi\colon \mathbb{P}^1_A \times \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{X}$ telle que $\varphi(\tau_1, \tau_2) = P$ pour un certain $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{P}^1_K(K) \times \mathbb{P}^1_K(K)$ en lequel*

[3] C'est-à-dire qu'il n'y a jamais à restreindre et à prolonger.

φ est définie, ainsi qu'en sa réduction $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$, et a une différentielle bijective en réduction à k.

(La seule chose à observer est qu'une fois P fixé on peut trouver $\tilde{M}$, puis M, pour faire la construction : et c'est bien possible car la proposition 4 permet de choisir M avec $\tilde{M} \notin \tilde{C}(\tilde{P}) \cup \tilde{D}(\tilde{P})$ — où $\tilde{D}(\tilde{P})$ désigne la courbe des points $\tilde{M} \in Y(k)$ tels que $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{M})$.)

Notamment, φ est étale au point $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ de la fibre spéciale (la platitude découle par exemple de [3], III, lemme 10.3a). En particulier, φ est dominante. Cette construction démontre de nouveau que X est unirationnelle, mais par une application rationnelle φ qui a la vertu qu'elle prend la valeur P (quelconque fixée) en un certain point rationnel particulier, que sa spécialisation est encore dominante, et plus précisément sa différentielle (en spécialisation, toujours) est bijective au point rationnel particulier.

Explicitons maintenant les conséquences de cette construction :

Proposition 6. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors il existe un ouvert de Zariski V non vide de Y tel que pour tout $Q^* \in X(\hat{K})$ dont la spécialisation $\tilde{Q}$ vérifie $\tilde{Q} \in V(k)$ et tout voisinage v-adique H de Q^* il existe un $Q \in X(K) \cap H$ pour lequel, de plus, il existe un morphisme $\psi\colon \mathbb{P}^1_K \to X$ avec $\psi(0) = P$ et $\psi(\infty) = Q$ (les points rationnels P et Q sont « directement R-équivalents »).*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}^1_A \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}^1_A$ un ouvert de Zariski de $\mathcal{X}$ sur lequel φ, construit plus haut, est défini et étale — on sait de plus qu'on peut trouver $\mathcal{U}$ ayant une intersection non vide avec la fibre spéciale, par exemple contenant $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$. On a donc $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ étale (tout défini sur $\operatorname{Spec} A$). Soit $V \subseteq Y$ l'ouvert de Zariski image par $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{U} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} k$. Si $Q^* \in \mathcal{X}(\hat{A}) = X(\hat{K})$ vérifie $\tilde{Q} \in V(k)$, alors le lemme de Hensel (appliqué à φ au-dessus de Q^*, sachant que $\tilde{Q}$ se relève par $\tilde{\varphi}$) assure l'existence de $(\delta_1^*, \delta_2^*) \in \mathbb{P}^1_K(\hat{K}) \times \mathbb{P}^1_K(\hat{K})$ tels que $\varphi(\delta_1^*, \delta_2^*) = Q^*$. On peut donc trouver un tel $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{P}^1_K(K) \times \mathbb{P}^1_K(K)$ tel que $\varphi(\delta_1, \delta_2)$ soit dans le voisinage H prescrit, ce qui définit $Q \in X(K)$. Enfin, quitte à composer φ avec un morphisme $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K \times_{\operatorname{Spec} K} \mathbb{P}^1_K$ qui envoie 0 sur (τ_1, τ_2) et ∞ sur (δ_1, δ_2), on a le résultat souhaité. □

On a en fait plus fort — voici atteint le but souhaité, toute classe de R-équivalence de $X(K)$ est dense dans $X(\hat{K})$:

Proposition 7. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors pour tout $Q^* \in X(\hat{K})$ et tout voisinage v-adique H de Q^*, il existe un $Q \in X(K) \cap H$ qui est directement R-équivalent à P.*

Démonstration. Écrivons $P = P_1 \bullet P_2$ avec $P_1, P_2 \in X(K)$, où $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ sont distincts et ne sont situés sur aucune droite de Y : d'après la proposition 4, il est certainement possible d'arriver à une telle écriture (on choisit d'abord $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$, puis P_1, et enfin on pose $P_2 = P \bullet P_1$). D'après le corollaire précédent, il existe un ouvert de Zariski V non vide de Y tel que pour tous Q_1^* et Q_2^* de $X(\hat{K})$ se spécialisant dans V et tous voisinages v-adiques H_1 et H_2 de Q_1^* et Q_2^* respectivement on puisse trouver des $Q_1, Q_2 \in X(K)$ appartenant à H_1 et H_2 respectivement, et qui soient directement R-équivalents à P_1 et P_2 respectivement. Appelons $\tilde{Q}$ la spécialisation de Q^* et choisissons une écriture $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 \bullet \tilde{Q}_2$, où $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ sont dans $V(k)$, sont distincts et ne sont situés sur aucune droite de Y. Relevons $\tilde{Q}_1$ en un $Q_1^* \in X(\hat{K})$ par ailleurs arbitraire, et posons $Q_2^* = Q^* \bullet Q_1^*$. Par continuité v-adique de l'application de composition au voisinage de (Q_1^*, Q_2^*), on peut trouver des voisinages H_1 et H_2 de Q_1^* et Q_2^* respectivement tels que $\bullet$ envoie $H_1 \times H_2$ dans H. Soit $Q_1 \in X(K) \cap H_1$ qui est directement R-équivalent à P_1, et $Q_2 \in X(K) \cap H_2$ qui est directement R-équivalent à P_2. Soient $\psi_i \colon \mathbb{P}^1_K \to X$ (pour $i = 1, 2$) tels que $\psi_i(0) = P_i$ et $\psi_i(\infty) = Q_i$. On pose $\psi(t) = \psi_1(t) \bullet \psi_2(t)$ et $Q = \psi(\infty) = Q_1 \bullet Q_2$. Alors manifestement l'application rationnelle ψ, définie au moins en 0 et ∞ s'étend en un morphisme $\mathbb{P}^1 \to X$ qui montre que P et Q sont directement R-équivalents, et par ailleurs $Q \in X(K) \cap H$. □

2 Approximation en plusieurs places de bonne réduction

Notations et hypothèses : Soient, comme dans la partie précédente, k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, Γ une courbe intègre sur k, qu'on peut toujours supposer propre et lisse, et $K = k(\Gamma)$ son corps des fonctions. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble fini de places de K, pour chacune v desquelles on notera $A_v = \{f \in K : v(f) \geq 0\}$ l'anneau des entiers correspondant, anneau de valuation discrète dont on note $\mathfrak{m}_v = \{f \in K : v(f) \geq 1\}$ l'idéal maximal et π_v une uniformisante. Soit $\hat{A}_v$ le complété de A_v pour sa valuation v, et $\hat{K}_v = \mathrm{Frac}(\hat{A}_v)$ le corps des fractions de $\hat{A}_v$. Soit $A = \bigcap_{v \in S} A_v \subseteq K$ l'anneau des éléments de K entiers en toutes les places

de S.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3_A$ une surface cubique sur A dont on note $X = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K$ la fibre générique et $Y_v = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} A_v} \operatorname{Spec} k_v$ la fibre spéciale (sur $k_v \cong k$). On suppose que X est lisse.

On suppose que toutes les places v de S sont des places de bonne réduction de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire que $\mathcal{X}$ est lisse sur A (tous les Y_v sont lisses).

On cherche à prouver que l'image de la flèche $X(K) \to \prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ est dense (où le but est muni de la topologie produit des topologies v-adiques). Autrement dit, que si $P_v \in X(\hat{K}_v)$ pour tout $v \in S$ et que U_v est un voisinage v-adique de P_v pour tout $v \in S$, alors il existe un $P \in X(K)$ tel que $P \in U_v$ pour tout $v \in S$. Or pour cela (et puisque $X(K)$ n'est pas vide), il suffit manifestement (par récurrence sur $\operatorname{card} S$) de prouver que si $P_0 \in X(K)$ est donné et que pour tout $v \in S$ on se donne un voisinage v-adique U_v de P_0 sauf pour un certain $w \in S$ pour lequel U_w est un voisinage w-adique d'un $P_w \in X(\hat{K}_w)$, alors il existe $P \in X(K)$ tel que $P \in U_v$ pour tout $v \in S$. Enfin, d'après la partie précédente, on peut supposer $P_w \in X(K)$.

En fait, le résultat de la section précédente montre qu'on peut plus précisément supposer que $P_w \in X(K)$ est directement R-équivalent à un point initial fixé quelconque dans $X(K)$, dont on peut supposer que c'est P_0 : soit donc $\psi \colon \mathbb{P}^1_K \to X$ tel que $\psi(0) = P_0$ et $\psi(\infty) = P_w$. Mais alors, en appliquant l'approximation faible sur $\mathbb{P}^1_K$, en trouvant un $t \in \mathbb{P}^1_K(K)$ qui approche ∞ en la place w et 0 en toutes les places $v \in S \setminus \{w\}$, on voit que $P = \psi(t)$ fournit le point désiré.

Remerciements : Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène pour m'avoir patiemment aidé à mettre en forme les arguments contenus dans cet article, ainsi qu'Antoine Ducros pour m'avoir invité à Rennes pour exposer ce résultat.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène & P. Gille, « Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable », *in* : *Arithmetic of higher dimensional arithmetic varieties*, B. Poonen & Yu. Tschinkel (éd.), Birkhäuser, Progress in Mathematics, 2003, p. 121–133.

[2] T. Graber, J. Harris & J. Starr, « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 57–67.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52.

[4] N. Katz, « Pinceaux de Lefschetz : théorème d'existence » (exposé XVII), *in* : *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie : Groupes de monodromie en géométrie algébrique II*, A. Grothendieck & al. (SGA7-II).

[5] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[6] J. Kollár, *Low degree polynomial equations : arithmetic, geometry and topology*, preprint, disponible sur `www.arxiv.org` comme `alg-geom/9607016`.

[7] J. Kollár, « Unirationality of cubic hypersurfaces », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002) n°3, 467–476.

[8] D. A. Madore, « Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques », *manuscripta mathematica* **110** (2003), 171–185.

[9] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[10] Sir Peter Swinnerton-Dyer, « Weak approximation and R-equivalence on cubic surfaces », *in* : *Rational points on algebraic varieties*, É. Peyre & Yu. Tschinkel (éd.), Birkäuser, Progress in Mathematics **199**, p. 359–406.

Une observation sur la R-équivalence sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques

David A. Madore

15 avril 2005

Le but de cette note est de prouver le point suivant :

Proposition 1. *Soit X une hypersurface cubique de dimension au moins* 10 *sur un corps p-adique K. Alors deux points quelconques de $X(K)$ sont R-équivalents : $X(K)/R = \{*\}$.*

Corollaire 2. *Soit X une hypersurface cubique de dimension au moins* 10 *sur un corps p-adique K. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur X, modulo équivalence rationnelle, est nul : $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$.*

On utilisera pour la proposition 1 uniquement les deux propriétés suivantes du corps K :

- toute forme quadratique sur K en au moins 5 variables possède un zéro non trivial, et
- toute forme cubique sur K en au moins 10 variables possède un zéro non trivial (cf. [1]).

Le résultat sera donc valable sur tout corps K possédant ces deux propriétés (par exemple si K est un corps C_2). Le corollaire 2 utilise, lui, le fait que ces propriétés sont encore satisfaites pour toute extension finie de K.

On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 3. *Soit $d \geq 1$ un entier et soit K un corps tel que toute forme quadratique sur K en au moins d variables possède un zéro non trivial. Soit Y une hypersurface cubique de dimension au moins $d - 1$ sur K, possédant un point singulier K-rationnel. Alors deux points quelconques de $Y(K)$ sont R-équivalents : $Y(K)/R = \{*\}$.*

Démonstration. Appelons $P \in Y(K)$ le point K-rationnel singulier dont l'existence est supposée. L'hypersurface Y est donnée dans $\mathbb{P}^n_K$ (où $n \geq d$), et on suppose pour fixer les idées que P a les coordonnées homogènes $(U_0 : \cdots : U_n) = (1 : 0 : \cdots : 0)$. Comme P est singulier, l'équation de Y s'écrit $U_0\, q(U_1, \ldots, U_n) + c(U_1, \ldots, U_n) = 0$, où q et c sont des polynômes homogènes à coefficients dans K de degrés respectifs 2 et 3.

Soit $Q \in Y(K)$: on va montrer que P et Q sont R-équivalents.

Si $Q = P$ ou si la droite reliant P à Q (dans $\mathbb{P}^n$) est incluse dans X alors le résultat est immédiat. Supposons donc que ce n'est pas le cas.

Remarquons que pour $(v_0 : \cdots : v_n)$ les coordonnées de Q, on a $(v_1, \ldots, v_n) \neq (0, \ldots, 0)$ (puisque $Q \neq P$) et $q(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ (puisque la droite reliant P à Q n'est pas incluse dans X, ce qui serait le cas si on avait $q(v_1, \ldots, v_n) = 0$ donc aussi $c(v_1, \ldots, v_n) = 0$).

On définit une application rationnelle $\psi\colon \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow Y$ par $(U_1 : \cdots : U_n) \mapsto (-c(U_1, \ldots, U_n) : U_1\, q(U_1, \ldots, U_n) : \cdots : U_n\, q(U_1, \ldots, U_n))$. D'après ce qui a été remarqué, cette application est au moins définie en $(v_1 : \cdots : v_n)$, qu'elle envoie sur Q.

Soit $(w_1, \ldots, w_n) \neq (0, \ldots, 0) \in K^n$ tel que $q(w_1, \ldots, w_n) = 0$, ce qui existe car $n \geq d$ donc la forme quadratique q en n variables a sur K un zéro non trivial. Soit $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n-1}$ (par exemple — mais pas nécessairement — linéaire) telle que $f(0) = (w_1 : \cdots : w_n)$ et $f(\infty) = (v_1 : \cdots : v_n)$. Posons $h = \psi \circ f$, qui se prolonge en un morphisme $h\colon \mathbb{P}^1 \to Y$. On a certainement $h(\infty) = Q$.

L'existence de h atteste que le point $P_1 = h(0)$ est R-équivalent à Q. Si $c(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$, alors ψ est définie en $(w_1 : \cdots : w_n)$ et y vaut P, de sorte que $P_1 = h(0) = P$ donc P et Q sont R-équivalents, ce qu'on voulait démontrer. Si au contraire $c(w_1, \ldots, w_n) = 0$, alors la droite Δ reliant $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$ à $(0\colon w_1\colon \cdots : w_n) \in \mathbb{P}^n$ est tout entière contenue dans Y. Or le point P_1 est sur cette droite Δ : en effet, si $\delta\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ est $(U_0\colon \cdots : U_n) \mapsto (U_1\colon \cdots : U_n)$, alors δ est définie en au moins un point de l'image de h (à savoir $h(\infty) = Q$) et $\delta \circ \psi$ est l'identité, donc $\delta \circ h = f$, donc $\delta(P_1) = f(0) = \delta(P)$, ce qui signifie bien que P_1 est sur Δ.

On voit alors que Q et P_1 sont R-équivalents (par h) et que P et P_1 sont R-équivalents (par Δ), ce qui prouve que P et Q sont R-équivalents.

Dans tous les cas, la conclusion souhaitée est atteinte. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante, qui (eu égard aux faits sur les corps p-adiques énoncés précédemment) implique im-

2

médiatement la proposition 1.

Proposition 4. *Soit $d \geq 1$ un entier et soit K un corps tel que toute forme quadratique ou cubique sur K en au moins d variables possède un zéro non trivial. Soit X une hypersurface cubique de dimension au moins d sur K. Alors deux points quelconques de $X(K)$ sont R-équivalents : $X(K)/R = \{*\}$.*

Démonstration. L'hypersurface X est donnée dans $\mathbb{P}^n_K$ où $n \geq d + 1$. Soient P et Q dans $X(K)$. On souhaite prouver que P et Q sont R-équivalents. Soient $T(P)$ et $T(Q)$ les hyperplans tangents respectifs à X en P et Q ; soit $C(P)$ l'hypersurface cubique dans $T(P) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ intersection de ce dernier avec X, et soit $C(Q)$ défini de façon analogue. Ainsi, $C(P)$ et $C(Q)$ sont des hypersurfaces cubiques ayant un point singulier K-rationnel (P ou Q respectivement). Si $P \in T(Q)$ ou $Q \in T(P)$, le résultat est donné par le lemme 3. On peut donc supposer $T(P)$ et $T(Q)$ distincts. Alors leur intersection H est un sous-espace linéaire projectif de dimension $n - 2$ de $\mathbb{P}^n$. Il existe un point $M \in (X \cap H)(K)$: en effet, $X \cap H$ est défini par une forme cubique en $n - 1 \geq d$ variables, qui possède un zéro non trivial sur K. Dans ces conditions, le lemme 3 assure successivement que P et M sont R-équivalents, puis que Q et M le sont : donc P et Q sont bien R-équivalents, comme souhaité. □

Enfin, expliquons comment on en déduit le corollaire 2 (l'argument qui suit est classique).

Démonstration du corollaire 2. Soit $a \in X(K)$ (toute forme cubique sur K en au moins 10 variables possède un zéro non trivial) : il suffit pour conclure de montrer que pour tout point fermé x sur X, le zéro-cycle $[x]$ qu'il définit est rationnellement équivalent à un multiple de $[a]$. Or si K' est le corps résiduel de x, disons de degré $d = [K' : K]$, alors, sur $X_{K'}$, x est R-équivalent, donc rationnellement équivalent, à $a \otimes_K K'$, et en poussant par le morphisme $p\colon X_{K'} \to X$ de degré d, on voit que $[x] - d[a]$ est rationnellement équivalent à zéro, ce qui donne la conclusion souhaitée. □

Naturellement, le même raisonnement fournit des analogues du lemme 3 et de la proposition 4 :

Corollaire 5. *Soit $d \geq 1$ un entier et soit K un corps tel que toute forme quadratique sur une extension finie K' de K en au moins d variables possède un zéro non trivial. Soit Y une hypersurface cubique de dimension au moins*

3

$d-1$ sur K, possédant un point singulier K-rationnel. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur Y, modulo équivalence rationnelle, est nul : $\mathrm{CH}_0^0(Y)=0$.

Corollaire 6. *Soit $d \geq 1$ un entier et soit K un corps tel que toute forme quadratique ou cubique sur une extension finie K' de K en au moins d variables possède un zéro non trivial. Soit X une hypersurface cubique de dimension au moins d sur K. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur X, modulo équivalence rationnelle, est nul :* $\mathrm{CH}_0^0(X)=0$.

Remarque 1 : Le lemme 3 permet de corriger une inexactitude dans la version publiée de [3], section 5.2 : l'affirmation « les classes de R-équivalence sont denses pour la topologie de Zariski » est erronée en général (sur un corps quelconque), elle ne vaut que pour les classes de R-équivalence contenant un point *lisse* (un contre-exemple est fourni par la surface cubique sur $\mathbb{R}$ d'équation $T(X^2+Y^2+Z^2)=X^3$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, dont le $\mathbb{R}$-point isolé $X{=}Y{=}Z{=}0$ est une classe de R-équivalence) ; de même, l'affirmation « une surface cubique k-rationnelle est R-triviale » est incorrecte sans hypothèse sur le corps k et sans hypothèse de lissité sur la surface (même contre-exemple). Néanmoins, avec les hypothèses faites sur le corps k (extension algébrique d'un corps fini, ce qui implique que k est C_1 et notamment que toute forme quadratique en au moins trois variables possède un zéro non-trivial), on résout ainsi la difficulté : d'une part, si la surface a un point k-rationnel singulier, le lemme 3 ci-dessus permet de conclure qu'elle est R-triviale, et d'autre part, si à l'inverse tous les points k-rationnels sont lisses, le raisonnement tel qu'écrit est correct.

Remarque 2 : On peut remarquer que les résultats de cette note, combinés à ceux des parties 4.4 et 6.1 de [3], ou, de façon semblable, à ceux de [2], donnent immédiatement la R-trivialité, ainsi que la nullité du groupe de Chow des classes de zéro-cycles de degré 0, pour une hypersurface cubique de dimension au moins 4 ayant bonne réduction sur $\mathbb{C}(x)((y))$ ou sur $\mathbb{C}((x))((y))$. (Sans l'hypothèse de bonne réduction, la présente note donne la même conclusion à partir de la dimension 10.)

Remerciements : Je remercie Laurent Moret-Bailly, rapporteur, pour m'avoir expliqué comment rédiger cette note de façon beaucoup plus agréable.

Références

[1] D. J. Lewis, « Cubic homogeneous polynomials over p-adic fields », *Ann. of Math* (2) **56** (1952), 473–478.

[2] J. Kollár, « Specialization of zero-cycles », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004) 689–708.

[3] D. A. Madore, « Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques », *manuscripta mathematica* **110** (2003), 171–185.

Non-nullité d'un groupe de Chow

David A. Madore

15 avril 2005

Plan

Le but de cette note est de prouver la non-nullité du groupe de Chow des classes de 0-cycles de degré 0 modulo équivalence rationnelle sur l'hypersurface cubique d'équation projective $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + tU^3 + t\nu V^3 = 0$ sur le corps $\mathbb{C}((\nu, t))$ (ou $\mathbb{C}((\nu))((t))$) ; on renvoie à la section finale 9 pour des remarques générales ainsi que la motivation de ce problème.

Le plan général est le suivant. Dans un premier temps, on détermine un modèle projectif et régulier $\mathscr{Y}$ sur $\mathbb{C}((\nu))[t]$ de l'hypersurface considérée, dont la fibre spéciale $\mathscr{Y}_0$ a des composantes lisses (une fois réduites) s'intersectant transversalement. Ceci fait l'objet des sections 1 à 4 : dans la section 1, on construit un premier modèle, singulier, dont on résout ensuite localement les singularités dans les sections 2 et 3 (il y a deux lieux singuliers, étudiés de façon parallèle, à chaque fois en utilisant une résolution toroïdale), et, dans la section 4, on recolle les résolutions locales obtenues, ce qui fournit le modèle $\mathscr{Y}$ ainsi qu'une description des quatre composantes irréductibles, $\mathscr{Y}_H, \mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_\ell, \mathscr{Y}_W$ de sa fibre spéciale $\mathscr{Y}_0$. La section 5 se concentre sur la composante $\mathscr{Y}_W$, la seule dont la description n'est pas immédiate, et la présente comme un éclaté de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$.

L'intérêt d'obtenir ce modèle est le suivant : on arrive à décrire précisément chacune des flèches $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_i) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_j)$ d'intersection d'un 1-cycle sur une des composantes $\mathscr{Y}_i$ de la fibre spéciale avec une composante $\mathscr{Y}_j$ (qui peut être $\mathscr{Y}_i$ elle-même ; pour le cas qui nous concerne, on n'aura besoin que des intersections avec $\mathscr{Y}_H$). Si on se donne un 1-cycle α sur le modèle $\mathscr{Y}$ tout entier, une façon de voir qu'il ne provient pas de la fibre spéciale $\mathscr{Y}_0$ (donc qu'il est non nul sur la fibre générique $\mathscr{Y} \setminus \mathscr{Y}_0$) est de prouver que son intersection avec un des $\mathscr{Y}_j$ n'est pas dans le sous-groupe

engendré par les images des $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_i) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_j)$. Autrement dit, le conoyau de $\bigoplus_i \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_i) \to \bigoplus_j \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_j)$ fournit un contrôle sur $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y} \setminus \mathscr{Y}_0)$ qu'on cherche à étudier. Cette méthode de calcul a été étudiée par C. S. Dalawat (voir [1] et notamment [2] théorème 4) qui montre que, pour une surface rationnelle sur un corps local déployée par une extension non ramifiée de celui-ci, on peut ainsi obtenir exactement le groupe de Chow ; ici, nous ne sommes pas dans ces hypothèses, mais on cherche simplement à prouver la non-nullité du groupe de Chow.

La section 6 explicite les flèches qui nous concernent entre les groupes de Chow des différentes composantes. L'une de ces flèches est une norme sur une courbe elliptique et on prouve dans la section 7 qu'elle n'est pas surjective (en donnant explicitement un point qui n'est pas une norme). Ceci permet, dans la section 8, de rassembler les morceaux et de construire deux points qui ne sont pas rationnellement équivalents.

1 Définitions et énoncé du problème

Sur le corps $\mathbb{C}(\!(\nu, t)\!)$, on considère l'hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$ définie par

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + t(U^3 + \nu V^3) = 0 \qquad (*)$$

dont on cherche à montrer que le groupe de Chow des 0-cycles de degré 0 modulo équivalence rationnelle n'est pas nul.

Pour commencer, on cherche un modèle projectif régulier sur $\mathbb{C}(\!(\nu)\!)[t]$ de l'équation $(*)$ ci-dessus.

Montons d'abord à $\mathbb{C}(\!(\nu, t^{1/3})\!)$. Soit $h = t^{1/3}$. L'équation $(*)$ s'écrit

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + (hU)^3 + \nu(hV)^3 = 0$$

Posons $\tilde{U} = hU$ et $\tilde{V} = hV$. On a le modèle évident $\mathscr{X}$, de même équation, dans $\mathbb{P}^4_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ où $k = \mathbb{C}(\!(\nu)\!)$,

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + \tilde{U}^3 + \nu \tilde{V}^3 = 0 \qquad (**)$$

— c'est-à-dire le produit de l'hypersurface cubique diagonale (lisse) ayant cette équation $(**)$ par la droite affine $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[h]$.

Le groupe $\boldsymbol{\mu}_3$ agit (sur ce produit) : par $((X : Y : Z : \tilde{U} : \tilde{V}), h) \mapsto ((X : Y : Z : \zeta\tilde{U} : \zeta\tilde{V}), \zeta h)$ (où ζ racine cubique primitive de l'unité). Le lieu fixe de cette action consiste en les $((X : Y : Z : 0 : 0), 0)$ avec

2

$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 = 0$ (soit une courbe de genre 1 sur k, que nous noterons C) et les $((0:0:0:\tilde{U}:\tilde{V}),0)$ avec $\tilde{U}^3 + \nu\tilde{V}^3 = 0$ (soit un point fermé de degré 3, que nous noterons Ω). On cherche à désingulariser le quotient par cette action, $\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ (ce qui donnera le modèle $\mathscr{Y}$ recherché sur $\mathbb{C}((\nu))[t]$). Pour cela, on va désingulariser séparément, et chacun par une technique « toroïdale », les deux lieux singuliers, C et Ω.

2 Étude au voisinage de C

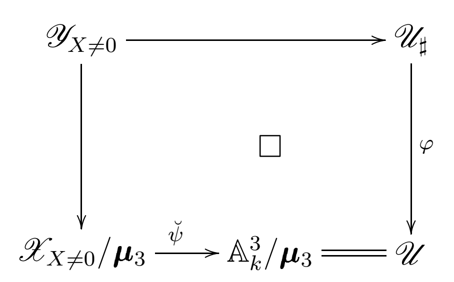
Plaçons-nous dans l'ouvert $\mathscr{X}_{X\neq 0}$ de $\mathscr{X}$ défini par $X \neq 0$: appelons $y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0}, u_{X\neq 0}, v_{X\neq 0}$ les coordonnées respectivement $Y/X, Z/X, \tilde{U}/X, \tilde{V}/X$ sur cet ouvert, qui vérifient $1+y^3_{X\neq 0}+\nu z^3_{X\neq 0}+u^3_{X\neq 0}+\nu v^3_{X\neq 0} = 0$. Enfin, considérons le morphisme $\psi_{X\neq 0}\colon \mathscr{X}_{X\neq 0} \to \mathbb{A}^3_k$ défini par $(y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0}, u_{X\neq 0}, v_{X\neq 0}, h) \mapsto (u_{X\neq 0}, v_{X\neq 0}, h)$. On se permettra, dans la suite, d'omettre parfois l'indice « $X \neq 0$ » lorsqu'il est clair d'après le contexte.

Le morphisme ψ est lisse lorsque $Y \neq 0$ ou $Z \neq 0$. Par ailleurs, il est compatible à l'action de $\boldsymbol{\mu}_3$ lorsque $\boldsymbol{\mu}_3$ agit sur $\mathscr{X}_{X\neq 0}$ comme expliqué précédemment (l'action sur $\mathscr{X}$ préserve l'ouvert $\mathscr{X}_{X\neq 0}$) et sur $\mathbb{A}^3_k$ par $(u,v,w) \mapsto (\zeta u, \zeta v, \zeta w)$. Notons $\breve{\psi}$ le morphisme $\mathscr{X}_{X\neq 0}/\boldsymbol{\mu}_3 \to \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3$ obtenu par passage au quotient. Ce morphisme $\breve{\psi}$ est encore lisse lorsque $Y \neq 0$ ou $Z \neq 0$ car il s'écrit :

$$\begin{gathered} \breve{\psi}\colon \operatorname{Spec} R[y,z]/(f) \to \operatorname{Spec} R \\ \text{où } R = k[u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3] \\ \text{et } f = 1 + y^3 + \nu z^3 + (u^3) + \nu(v^3) \\ \text{vérifiant } \tfrac{\partial f}{\partial y} \text{ inversible ou } \tfrac{\partial f}{\partial z} \text{ inversible} \end{gathered}$$

Par ailleurs, $\mathscr{U} = \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3$ a exactement un point singulier O, correspondant au seul point fixe de l'action de $\boldsymbol{\mu}_3$ sur $\mathbb{A}^3_k$, à savoir $(0,0,0)$. L'image réciproque de O par $\psi_{X\neq 0}$ est l'ouvert $X \neq 0$ de C. On va décrire une flèche $\varphi\colon \mathscr{U}_\sharp \to \mathscr{U}$ de désingularisation (φ morphisme propre birationnel et $\mathscr{U}_\sharp$ régulier) qui sera un isomorphisme partout sauf au-dessus de ce point, et on appellera $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$ le produit fibré de $\mathscr{X}_{X\neq 0}/\boldsymbol{\mu}_3$ avec $\mathscr{U}_\sharp$ au-dessus de $\mathscr{U} = \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3$ (par les morphismes $\breve{\psi}$ et φ). Nous expliquerons plus loin comment on peut recoller la désingularisation $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$ avec ses analogues $\mathscr{Y}_{Y\neq 0}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0}$.

3



On passe à la description « torique » pour construire le morphisme φ (on renvoie à [4] pour les généralités sur les variétés toriques) : $\mathbb{G}^3_{\mathrm{m},k}$ est le spectre de l'algèbre du réseau $\mathbb{Z}^3$. Le quotient par l'action (évidente) de $\boldsymbol{\mu}_3$ est le spectre de l'algèbre des monômes fixes, c'est-à-dire l'algèbre du réseau $T^* = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : 3 \text{ divise } (a+b+c)\}$ (a pour base : $(3,0,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$). Le réseau dual est $T_* = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ (a pour base : $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(0,-1,-1)$, $(0,1,0)$). Le quotient de $\mathbb{A}^3_k$ par l'action de $\boldsymbol{\mu}_3$ est défini par le cône $\sigma = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha,\beta,\gamma \geq 0\}$ (engendré en tant que cône réel par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$). On voit que ce quotient n'est pas lisse, car $\sigma \cap T_*$ contient quatre éléments minimaux, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, donc n'est pas libre en tant que monoïde commutatif. En revanche, on peut désingulariser en remplaçant σ par un éventail de trois cônes dont la réunion est σ et qui chacun sont engendrés par leurs éléments minimaux, à savoir :

- σ_a engendré par $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.
- σ_b engendré par $(1,0,0)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ et $(0,0,1)$.
- σ_c engendré par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

On appellera $\mathscr{U}_a, \mathscr{U}_b, \mathscr{U}_c$ les variétés toriques affines lisses correspondant à ces cônes (par exemple, $\mathscr{U}_a = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_a)^\vee]$), et $\mathscr{U}_\sharp$ leur recollement selon les variétés toriques affines définies par les intersections de ces cônes. On rappelle que $\mathscr{U} = \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3$ est la variété torique affine correspondant au cône σ, soit $\mathscr{U} = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in T^* \cap \sigma^\vee]$.

Si $(a,b,c) \in T^*$ (trois entiers tels que 3 divise $a+b+c$, donc) alors on notera $u^a v^b w^c$ l'élément de $k[\chi^r : r \in T^*]$ égal à $\chi^{(a,b,c)}$. Ainsi, on peut écrire $\mathscr{U} = \operatorname{Spec} k[u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3]$ et le morphisme $\mathbb{A}^3_k \to \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3 = \mathscr{U}$ est donné par l'inclusion évidente d'anneaux si on écrit $\mathbb{A}^3_k = \operatorname{Spec} k[u,v,w]$. Avec ces notations (et quelques abus évidents), on peut écrire

- $\mathscr{U}_a = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_a)^\vee] = \operatorname{Spec} k[u^3, u^{-1}v, u^{-1}w]$
- $\mathscr{U}_b = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_b)^\vee] = \operatorname{Spec} k[uv^{-1}, v^3, v^{-1}w]$

4

– $\mathscr{U}_c = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_c)^\vee] = \operatorname{Spec} k[uw^{-1}, vw^{-1}, w^3]$
(rappelons que toutes ces variétés sont, non canoniquement, k-isomorphes à $\mathbb{A}^3_k$).

On appelle $\varphi\colon \mathscr{U}_\sharp \to \mathscr{U} = \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3$ le morphisme obtenu par recollement des morphismes $\mathscr{U}_a \to \mathscr{U}$, $\mathscr{U}_b \to \mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_c \to \mathscr{U}$ correspondant aux inclusions de cônes. Par exemple $\mathscr{U}_a \to \mathscr{U}$ est donné par les équations $u^3 = (u^3)$; $u^2v = (u^3)\cdot(u^{-1}v)$; $u^2w = (u^3)\cdot(u^{-1}w)$; $uv^2 = (u^3)\cdot(u^{-1}v)^2$; $uvw = (u^3)\cdot(u^{-1}v)\cdot(u^{-1}w)$; $uw^2 = (u^3)\cdot(u^{-1}w)^2$; $v^3 = (u^3)\cdot(u^{-1}v)^3$; $v^2w = (u^3)\cdot(u^{-1}v)^2\cdot(u^{-1}w)$; $vw^2 = (u^3)\cdot(u^{-1}v)\cdot(u^{-1}w)^2$; $w^3 = (u^3)\cdot(u^{-1}w)^3$. Puisque le support de l'éventail déterminé par $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ est σ, le morphisme φ est (birationnel) propre.

Montrons que φ est un isomorphisme en-dehors du seul point singulier O de $\mathscr{U}$ (O est défini par l'idéal engendré par $u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3$). Pour cela, il suffit de voir que φ est un isomorphisme au-dessus de chacun des ouverts $u^3 \neq 0$, $v^3 \neq 0$ et $w^3 \neq 0$ de $\mathscr{U}$. Dans $\mathscr{U}_a$, l'image réciproque par φ de l'ouvert $v^3 \neq 0$ s'écrit $u^{-1}v \neq 0$ et $v^3 \neq 0$ puisque $v^3 = (u^3)\cdot(u^{-1}v)^3$, donc cette image réciproque est contenue dans celle de l'ouvert $u^3 \neq 0$, et il en va de même de l'image réciproque de $w^3 \neq 0$; or si u^3 est inversible, on peut exprimer $u^{-1}v = (u^3)^{-1}\cdot(u^2v)$ et $u^{-1}w = (u^3)^{-1}\cdot(u^2w)$ ce qui détermine un morphisme, réciproque à φ, de l'ouvert $u^3 \neq 0$ de $\mathscr{U}$, vers $\mathscr{U}_a$. De même, dans $\mathscr{U}_b$ on voit que si l'un quelconque de u^3, v^3, w^3 est inversible, alors v^3 est inversible et les trois coordonnées $uv^{-1}, v^3, v^{-1}w$ peuvent s'exprimer en utilisant l'inverse de v^3. Et de même dans $\mathscr{U}_c$. Ceci montre que φ est un isomorphisme au-dessus du complémentaire de $O \in \mathscr{U}$.

Pour mieux comprendre le morphisme φ, étudions à présent sa fibre $\mathscr{H}$ au-dessus de O. Celle-ci est déterminée par les équations suivantes :

– Dans $\mathscr{U}_a$, par $u^3 = 0$.
– Dans $\mathscr{U}_b$, par $v^3 = 0$.
– Dans $\mathscr{U}_c$, par $w^3 = 0$.

Il est alors clair que $\mathscr{H}$ est isomorphe au $\mathbb{P}^2_k$ de coordonnées homogènes $(U_H : V_H : W_H)$ en posant $u^{-1}w = U_H^{-1}W_H$ et $u^{-1}v = U_H^{-1}V_H$ dans $\mathscr{U}_a$, $uv^{-1} = U_H V_H^{-1}$ et $v^{-1}w = V_H^{-1}W_H$ dans $\mathscr{U}_b$ et enfin $uw^{-1} = U_H W_H^{-1}$ et $vw^{-1} = V_H W_H^{-1}$ dans $\mathscr{U}_c$.

En écrivant l'expression de w^3 dans chacun des ouverts $\mathscr{U}_a, \mathscr{U}_b, \mathscr{U}_c$ de $\mathscr{U}$, on voit que l'image réciproque par φ du fermé $w^3 = 0$ de $\mathscr{U}$ est réunion de deux composantes irréductibles : $\mathscr{H}$ et $\mathscr{W}_\sharp$, avec pour multiplicités respectives 1 et 3, où $\mathscr{H} = \varphi^{-1}(O)$ a été décrite ci-dessus, et où $\mathscr{W}_\sharp$ est définie par l'équation $u^{-1}w = 0$ dans $\mathscr{U}_a$ et $v^{-1}w = 0$ dans $\mathscr{U}_b$ (et elle ne rencontre pas

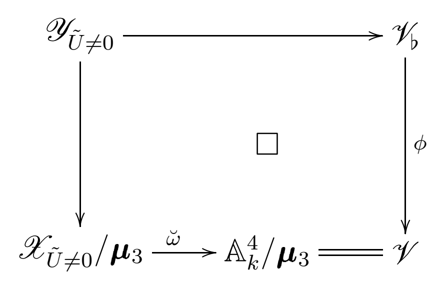
5

$\mathscr{U}_c$). L'intersection de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{W}_\sharp$ est le $\mathbb{P}^1_k$ de coordonnées $(U_H : V_H)$ défini par $W_H = 0$ dans $\mathscr{H}$.

3 Étude au voisinage de Ω

Plaçons-nous dans l'ouvert $\mathscr{X}_{\tilde{U}\neq 0}$ de $\mathscr{X}$ défini par $\tilde{U} \neq 0$: appelons $x_{\tilde{U}\neq 0}, y_{\tilde{U}\neq 0}, z_{\tilde{U}\neq 0}, v_{\tilde{U}\neq 0}$ les coordonnées respectivement $X/\tilde{U}, Y/\tilde{U}, Z/\tilde{U}, \tilde{V}/\tilde{U}$ sur cet ouvert, qui vérifient $x^3_{\tilde{U}\neq 0} + y^3_{\tilde{U}\neq 0} + \nu z^3_{\tilde{U}\neq 0} + 1 + \nu v^3_{\tilde{U}\neq 0} = 0$. Enfin, considérons le morphisme $\omega\colon \mathscr{X}_{\tilde{U}\neq 0} \to \mathbb{A}^4_k$ défini par $(x_{\tilde{U}\neq 0}, y_{\tilde{U}\neq 0}, z_{\tilde{U}\neq 0}, v_{\tilde{U}\neq 0}, h) \mapsto (x_{\tilde{U}\neq 0}, y_{\tilde{U}\neq 0}, z_{\tilde{U}\neq 0}, h)$. De même que précédemment, le morphisme ω est étale lorsque $\tilde{V} \neq 0$, il passe au quotient par $\boldsymbol{\mu}_3$ lorsque $\boldsymbol{\mu}_3$ agit sur $\mathbb{A}^4_k$ par $(x, y, z, \tau) \mapsto (\zeta^2 x, \zeta^2 y, \zeta^2 z, \zeta\tau)$, et le morphisme $\breve{\omega}\colon \mathscr{X}_{\tilde{U}\neq 0}/\boldsymbol{\mu}_3 \to \mathbb{A}^4_k/\boldsymbol{\mu}_3$ est encore étale pour $\tilde{V} \neq 0$.

La variété $\mathscr{V} = \mathbb{A}^4_k/\boldsymbol{\mu}_3$ a exactement un point singulier O, correspondant au seul point fixe de l'action de $\boldsymbol{\mu}_3$ sur $\mathbb{A}^4_k$, à savoir $(0, 0, 0, 0)$. L'image réciproque de O par ω est Ω. On va décrire une flèche $\phi\colon \mathscr{V}_\flat \to \mathscr{V}$ de désingularisation (ϕ morphisme propre birationnel et $\mathscr{V}_\flat$ régulier) qui sera un isomorphisme partout sauf au-dessus de ce point, et on appellera $\mathscr{Y}_{\tilde{U}\neq 0}$ le produit fibré de $\mathscr{X}_{\tilde{U}\neq 0}/\boldsymbol{\mu}_3$ avec $\mathscr{V}_\flat$ au-dessus de $\mathscr{V} = \mathbb{A}^4_k/\boldsymbol{\mu}_3$ (par les morphismes $\breve{\omega}$ et ϕ).



On passe à la description « torique » : $\mathbb{G}^4_{\mathrm{m},k}$ est le spectre de l'algèbre du réseau $\mathbb{Z}^4$. Le quotient par l'action (évidente) de $\boldsymbol{\mu}_3$ est le spectre de l'algèbre des monômes fixes, c'est-à-dire l'algèbre du réseau $S^* = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : 3 \text{ divise } (2a + 2b + 2c + d)\}$ (a pour base : $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 3)$). Le réseau dual est $S_* = \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}\cdot(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (a pour base : $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$). Le quotient de $\mathbb{A}^4_k$ par l'action de $\boldsymbol{\mu}_3$ est défini par le cône $\sigma = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0\}$ (engendré en tant que cône réel par $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$). On voit que ce

quotient n'est pas lisse, car $\sigma \cap S_*$ contient six éléments minimaux, $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ et $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, donc n'est pas libre en tant que monoïde commutatif. En revanche, on peut désingulariser en remplaçant σ par un éventail des sept cônes dont la réunion est σ et qui chacun sont engendrés par leurs éléments minimaux, à savoir :

– σ_0 engendré par $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.
– σ'_x engendré par $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.
– σ_x engendré par $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$.
– σ'_y engendré par $(1,0,0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $(0,0,1,0)$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.
– σ_y engendré par $(1,0,0,0)$ $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$.
– σ'_z engendré par $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.
– σ_z engendré par $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ et $(0,0,0,1)$.

On appellera $\mathscr{V}_0, \mathscr{V}'_x, \mathscr{V}_x, \mathscr{V}'_y, \mathscr{V}_y, \mathscr{V}'_z, \mathscr{V}_z$ les variétés toriques affines lisses correspondant à ces cônes (par exemple, $\mathscr{V}_0 = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_0)^\vee]$), et $\mathscr{V}_\flat$ leur recollement selon les variétés toriques affines définies par les intersections de ces cônes. On rappelle que $\mathscr{V} = \mathbb{A}^4_k/\boldsymbol{\mu}_3$ est la variété torique affine correspondant au cône σ, soit $\mathscr{V} = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap \sigma^\vee]$.

Si $(a,b,c,d) \in S^*$ (quatre entiers tels que 3 divise $2a+2b+2c+d$, donc) alors on notera $x^a y^b z^c \tau^d$ l'élément de $k[\chi^r : r \in S^*]$ égal à $\chi^{(a,b,c,d)}$. Ainsi, on peut écrire $\mathscr{V} = \operatorname{Spec} k[x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2z, xyz, y^2z, xz^2, yz^2, z^3, x\tau, y\tau, z\tau, \tau^3]$ et le morphisme $\mathbb{A}^4_k \to \mathbb{A}^4_k/\boldsymbol{\mu}_3 = \mathscr{V}$ est donné par l'inclusion évidente d'anneaux si on écrit $\mathbb{A}^4_k = \operatorname{Spec} k[x,y,z,\tau]$. Avec ces notations (et quelques abus évidents), on peut écrire

– $\mathscr{V}_0 = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_0)^\vee] = \operatorname{Spec} k[x\tau^{-2}, y\tau^{-2}, z\tau^{-2}, \tau^3]$
– $\mathscr{V}'_x = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_x)^\vee] = \operatorname{Spec} k[x^2\tau^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-1}\tau^2]$
– $\mathscr{V}_x = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_x)^\vee] = \operatorname{Spec} k[x^3, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-2}\tau]$
– $\mathscr{V}'_y = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_y)^\vee] = \operatorname{Spec} k[xy^{-1}, y^2\tau^{-1}, y^{-1}z, y^{-1}\tau^2]$
– $\mathscr{V}_y = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_y)^\vee] = \operatorname{Spec} k[xy^{-1}, y^3, y^{-1}z, y^{-2}\tau]$
– $\mathscr{V}'_z = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_z)^\vee] = \operatorname{Spec} k[xz^{-1}, yz^{-1}, z^2\tau^{-1}, z^{-1}\tau^2]$
– $\mathscr{V}_z = \operatorname{Spec} k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_z)^\vee] = \operatorname{Spec} k[xz^{-1}, yz^{-1}, z^3, z^{-2}\tau]$

(rappelons que toutes ces variétés sont, non canoniquement, k-isomorphes à $\mathbb{A}^4_k$).

On appelle $\phi\colon \mathscr{V}_\flat \to \mathscr{V}$ le morphisme obtenu par recollement des morphismes $\mathscr{V}_0 \to \mathscr{V}$ et semblables correspondant aux inclusions de cônes. Par exemple $\mathscr{V}_0 \to \mathscr{V}$ est donné par les équations $x^3 = (x\tau^{-2})^3 \cdot (\tau^3)^2$; $x^2y = (x\tau^{-2})^2 \cdot (y\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$; $xy^2 = (x\tau^{-2}) \cdot (y\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$; $y^3 = (y\tau^{-2})^3 \cdot (\tau^3)^2$; $x^2z = (x\tau^{-2})^2 \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$; $xyz = (x\tau^{-2}) \cdot (y\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$; $y^2z = (y\tau^{-2})^2 \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$; $xz^2 = (x\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$; $yz^2 = (y\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$; $z^3 =$

$(z\tau^{-2})^3\cdot(\tau^3)^2$; $x\tau = (x\tau^{-2})\cdot(\tau^3)$; $y\tau = (y\tau^{-2})\cdot(\tau^3)$; $z\tau = (z\tau^{-2})\cdot(\tau^3)$; $\tau^3 = (\tau^3)$. Puisque le support de l'éventail déterminé par $\sigma_0, \sigma'_x, \sigma_x, \sigma'_y, \sigma_y, \sigma'_z, \sigma_z$ est σ, le morphisme φ est (birationnel) propre.

De même que précédemment, ϕ est un isomorphisme en-dehors du seul point singulier O de $\mathscr{V}$.

Pour mieux comprendre le morphisme ϕ, étudions à présent sa fibre $\mathscr{K}$ au-dessus de O. Celle-ci est déterminée par les équations suivantes :

- Dans $\mathscr{V}_0$, par $\tau^3 = 0$.
- Dans $\mathscr{V}'_x$, par $(x^{-1}\tau^2)\cdot(x^2\tau^{-1}) = 0$.
- Dans $\mathscr{V}_x$, par $x^3 = 0$.
- Dans $\mathscr{V}'_y$, par $(y^{-1}\tau^2)\cdot(y^2\tau^{-1}) = 0$.
- Dans $\mathscr{V}_y$, par $y^3 = 0$.
- Dans $\mathscr{V}'_z$, par $(z^{-1}\tau^2)\cdot(z^2\tau^{-1}) = 0$.
- Dans $\mathscr{V}_z$, par $z^3 = 0$.

Il est alors aisé de voir que $\mathscr{K}$ a exactement deux composantes irréductibles, que nous noterons $\mathscr{K}_3$ et $\mathscr{K}_\ell$: précisément,

- $\mathscr{K}_3$ ne rencontre pas $\mathscr{V}_x$ ni $\mathscr{V}_y$ ni $\mathscr{V}_z$ et a pour équation $\tau^3 = 0$ dans $\mathscr{V}_0$, $x^2\tau^{-1} = 0$ dans $\mathscr{V}'_x$, $y^2\tau^{-1} = 0$ dans $\mathscr{V}'_y$ et $z^2\tau^{-1} = 0$ dans $\mathscr{V}'_z$.
- $\mathscr{K}_\ell$ ne rencontre pas $\mathscr{V}_0$ et a pour équation $x^{-1}\tau^2 = 0$ dans $\mathscr{V}'_x$, $x^3 = 0$ dans $\mathscr{V}_x$, $y^{-1}\tau^2 = 0$ dans $\mathscr{V}'_y$, $y^3 = 0$ dans $\mathscr{V}_y$, $z^{-1}\tau^2 = 0$ dans $\mathscr{V}'_z$ et $z^3 = 0$ dans $\mathscr{V}_z$.

Alors $\mathscr{K}_3$ est isomorphe à $\mathbb{P}^3_k$ de coordonnées homogènes $(X_3 : Y_3 : Z_3 : T_3)$ en posant $x\tau^{-2} = X_3T_3^{-1}$, $y\tau^{-2} = Y_3T_3^{-1}$ et $z\tau^{-2} = Z_3T_3^{-1}$ dans $\mathscr{V}_0$, $x^{-1}y = X_3^{-1}Y_3$, $x^{-1}z = X_3^{-1}Z_3$ et $x^{-1}\tau^2 = X_3^{-1}T_3$ dans $\mathscr{V}'_x$, $xy^{-1} = X_3Y_3^{-1}$, $y^{-1}z = Y_3^{-1}Z_3$ et $y^{-1}\tau^2 = Y_3^{-1}T_3$ dans $\mathscr{V}'_y$, et enfin $xz^{-1} = X_3Z_3^{-1}$, $yz^{-1} = Y_3Z_3^{-1}$ et $z^{-1}\tau^2 = Z_3^{-1}T_3$ dans $\mathscr{V}'_z$. Quant à $\mathscr{K}_\ell$, il possède un morphisme $\mathscr{K}_\ell \to \mathbb{P}^2_k$ vers le $\mathbb{P}^2_k$ de coordonnées homogènes $(X_\ell : Y_\ell : Z_\ell)$, défini en envoyant un point $(x^2\tau^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-1}\tau^2)$ de $\mathscr{V}'_x$ ou bien $(x^3, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-2}\tau)$ de $\mathscr{V}_x$ vers $(1 : x^{-1}y : x^{-1}z) \in \mathbb{P}^2_k$, et de même dans $\mathscr{V}'_y$ et $\mathscr{V}_y$ (envoyer vers $(xy^{-1} : 1 : y^{-1}z)$) et dans $\mathscr{V}'_z$ et $\mathscr{V}_z$ (envoyer vers $(xz^{-1} : yz^{-1} : 1)$) ; la fibre de ce morphisme $\mathscr{K}_\ell \to \mathbb{P}^2_k$ est un $\mathbb{P}^1$, donc $\mathscr{K}_\ell$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^2_k$. L'intersection de $\mathscr{K}_3$ et $\mathscr{K}_\ell$ est un $\mathbb{P}^2_k$, défini dans $\mathscr{K}_3$ par $T_3 = 0$ et section du morphisme $\mathscr{K}_\ell \to \mathbb{P}^2_k$.

En écrivant l'expression de τ^3 dans chacun des ouverts $\mathscr{V}_0, \mathscr{V}'_x, \mathscr{V}_x, \mathscr{V}'_y, \mathscr{V}_y, \mathscr{V}'_z, \mathscr{V}_z$, on voit que l'image réciproque par ϕ du fermé $\tau^3 = 0$ de $\mathscr{V}$ est réunion de trois composantes irréductibles : $\mathscr{K}_3$ avec multiplicité 1, $\mathscr{K}_\ell$ avec multiplicité 2, et une troisième composante $\mathscr{W}_\flat$ avec multiplicité 3, cette composante

8

$\mathscr{W}_\flat$ étant définie par l'équation $x^{-2}\tau = 0$ dans $\mathscr{V}_x$, $y^{-2}\tau = 0$ dans $\mathscr{V}_y$ et $z^{-2}\tau = 0$ dans $\mathscr{V}_z$. L'intersection de $\mathscr{K}_3$ avec $\mathscr{W}_\flat$ est vide, tandis que celle de $\mathscr{K}_\ell$ avec $\mathscr{W}_\flat$ est un $\mathbb{P}^2_k$ section du morphisme $\mathscr{K}_\ell \to \mathbb{P}^2_k$, distincte de, et ne rencontrant pas, la section définie par l'intersection avec $\mathscr{K}_3$.

4 Recollement

À ce stade-là, nous avons défini des désingularisations de différents ouverts de $\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$: à savoir, $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$, (et $\mathscr{Y}_{Y\neq 0}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0}$ définis de façon exactement analogue) ainsi que $\mathscr{Y}_{\tilde{U}\neq 0}$ (on pourrait aussi définir $\mathscr{Y}_{\tilde{V}\neq 0}$, mais cela ne présente pas d'intérêt vu que le seul point singulier de $\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ vérifiant $\tilde{V}\neq 0$, à savoir Ω, vérifie aussi $\tilde{U}\neq 0$). Il va s'agir d'expliquer pourquoi ces différents morceaux se recollent en un unique $\Phi\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ (cette flèche étant alors propre et birationnelle, comme chacune des flèches qu'on a recollées). Mais dans l'immédiat, admettons ce point et expliquons pourquoi $\mathscr{Y}$ est bien régulier. On a vu précédemment que la flèche $\breve{\psi}_{X\neq 0}\colon \mathscr{X}_{X\neq 0}/\boldsymbol{\mu}_3 \to \mathbb{A}^3_k/\boldsymbol{\mu}_3 = \mathscr{U}$ était lisse sur la réunion des ouverts $Y\neq 0$ et $Z\neq 0$; en tirant par $\varphi\colon \mathscr{U}_\sharp \to \mathscr{U}$, on en déduit que $\mathscr{Y}_{X\neq 0}\to\mathscr{U}_\sharp$ est lisse sur cette même réunion, donc que $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$ l'est. Après recollement, on voit que $\mathscr{Y}$ est lisse au moins sur la réunion des intersections deux à deux des ouverts $X\neq 0$, $Y\neq 0$ et $Z\neq 0$; or comme cette réunion contient (l'image réciproque de) la courbe C (rappelons qu'elle est définie par $X^3+Y^3+\nu Z^3=0$ avec $\tilde{U}=\tilde{V}=0$ et $h=0$), $\mathscr{Y}$ est lisse au moins au-dessus de C. De même, grâce à $\mathscr{Y}_{\tilde{U}\neq 0}$, on peut dire que $\mathscr{Y}$ est lisse au-dessus de Ω. Comme C et Ω sont les seuls lieux singuliers de $\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ et qu'ailleurs $\mathscr{Y}\to\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ est un isomorphisme, on a bien la lissité de $\mathscr{Y}$ partout.

Pour recoller les différents $\mathscr{Y}_\bullet$, le plus simple est encore d'introduire des coordonnées. Commençons par $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$, $\mathscr{Y}_{Y\neq 0}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0}$. D'après la description qu'on a faite de $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$, il est réunion de trois ouverts, $\mathscr{Y}_{X\neq 0,a}, \mathscr{Y}_{X\neq 0,b}, \mathscr{Y}_{X\neq 0,c}$, décrits respectivement comme

$$\begin{gathered}
\mathscr{Y}_{X\neq 0,a} = \operatorname{Spec} k[y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0}, (u^3)_{X\neq 0}, (u^{-1}v)_{X\neq 0}, (u^{-1}w)_{X\neq 0}] \\
/(1 + y^3_{X\neq 0} + \nu z^3_{X\neq 0} + (u^3)_{X\neq 0} + \nu (u^3)_{X\neq 0}\,(u^{-1}v)^3_{X\neq 0}) \\
\mathscr{Y}_{X\neq 0,b} = \operatorname{Spec} k[y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0}, (uv^{-1})_{X\neq 0}, (v^3)_{X\neq 0}, (v^{-1}w)_{X\neq 0}] \\
/(1 + y^3_{X\neq 0} + \nu z^3_{X\neq 0} + (uv^{-1})^3_{X\neq 0}\,(v^3)_{X\neq 0} + \nu (v^3)_{X\neq 0}) \\
\mathscr{Y}_{X\neq 0,c} = \operatorname{Spec} k[y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0}, (uw^{-1})_{X\neq 0}, (vw^{-1})_{X\neq 0}, (w^3)_{X\neq 0}] \\
/(1 + y^3_{X\neq 0} + \nu z^3_{X\neq 0} + (uw^{-1})^3_{X\neq 0}\,(w^3)_{X\neq 0} + \nu (vw^{-1})^3_{X\neq 0})\,(w^3)_{X\neq 0}
\end{gathered}$$

9

et on a une description semblable de $\mathscr{Y}_{Y\neq 0}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0}$ comme réunion de trois ouverts. Ces descriptions sont fastidieuses à écrire, mais suggèrent immédiatement les formules de recollement : par exemple, sur l'intersection de $\mathscr{Y}_{X\neq 0,a}$ et $\mathscr{Y}_{Y\neq 0,a}$, qui peut également se décrire comme l'ouvert $y_{X\neq 0} \neq 0$ de $\mathscr{Y}_{X\neq 0,a}$, on a (en utilisant simplement les formules semblables pour la transition entre les ouverts $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ de $\mathscr{X}$)

$$\begin{aligned} x_{Y\neq 0} &= y_{X\neq 0}^{-1} \\ z_{Y\neq 0} &= y_{X\neq 0}^{-1}\, z_{X\neq 0} \\ (u^3)_{Y\neq 0} &= y_{X\neq 0}^{-3}\, (u^3)_{X\neq 0} \\ (u^{-1}v)_{Y\neq 0} &= (u^{-1}v)_{X\neq 0} \\ (u^{-1}w)_{Y\neq 0} &= y_{X\neq 0}\, (u^{-1}w)_{X\neq 0} \end{aligned}$$

et, pour prendre un autre exemple, sur l'intersection de $\mathscr{Y}_{X\neq 0,a}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0,c}$, où $z_{X\neq 0}$ et $(u^{-1}w)_{X\neq 0}$ sont inversibles, on a (en utilisant de plus les formules de transition données par la description torique)

$$\begin{aligned} x_{Z\neq 0} &= z_{X\neq 0}^{-1} \\ y_{Z\neq 0} &= z_{X\neq 0}^{-1}\, y_{X\neq 0} \\ (uw^{-1})_{Z\neq 0} &= z_{X\neq 0}^{-1}\, (u^{-1}w)_{X\neq 0}^{-1} \\ (vw^{-1})_{Z\neq 0} &= z_{X\neq 0}^{-1}\, (u^{-1}w)_{X\neq 0}^{-1}\, (u^{-1}v)_{X\neq 0} \\ (w^3)_{Z\neq 0} &= (u^{-1}w)_{X\neq 0}^{3}\, (u^3)_{X\neq 0} \end{aligned}$$

Bref, il n'y a pas de difficulté à recoller $\mathscr{Y}_{X\neq 0}$, $\mathscr{Y}_{Y\neq 0}$ et $\mathscr{Y}_{Z\neq 0}$ en écrivant chacun comme la réunion des trois ouverts fournis par la description torique. Ceci fournit la description de $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$ au voisinage de C. (Le lecteur qui ne voudrait pas vérifier la totalité des calculs peut observer qu'on est simplement en train de décrire un fibré en $\mathbb{P}^2$ sur C, à savoir la fibre de $\mathscr{Y}$ au-dessus de C.)

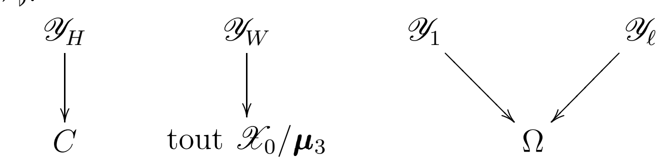
La description au-dessus de Ω est plus facile, puisque $\mathscr{Y}_{\tilde{U}\neq 0}$ y participe seul. Comme Ω ne rencontre pas C et que nos résolutions sont des isomorphismes partout ailleurs qu'au-dessus de Ω et C, il n'y a pas de problème à recoller la résolution au-dessus de C et celle au-dessus de Ω et compléter pour recouvrir tout $\mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$.

Finalement, on a obtenu une flèche $\Phi\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}/\boldsymbol{\mu}_3$, propre et birationnelle avec $\mathscr{Y}$ lisse. Ce $\mathscr{Y}$ est le modèle recherché.

Le morphisme $t = h^3\colon \mathscr{Y} \to \mathbb{A}^1_k$ a une fibre $\mathscr{Y}_0$ ($h^3 = 0$) formée de quatre composantes irréductibles (rappelons que h^3 vaut w^3 dans $\mathscr{U}$ et τ^3 dans $\mathscr{V}$) :

10

– Un fibré en $\mathbb{P}^2$ sur C, que nous noterons $\mathscr{Y}_H$, avec multiplicité 1. Cette composante est située au-dessus de C. Il s'agit de la composante correspondant à $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{U}_\sharp$.
– Une composante $\mathscr{Y}_1$ qui n'est autre que $\mathbb{P}^3_\Omega$ (c'est-à-dire le produit fibré de $\mathbb{P}^2_k$ avec $\Omega = \operatorname{Spec} k[\sqrt[3]{\nu}]$ au-dessus de $\operatorname{Spec} k$), avec multiplicité 1. Cette composante est située au-dessus de Ω. Il s'agit de la composante correspondant à $\mathscr{K}_3 \subseteq \mathscr{V}_\flat$.
– Une composante $\mathscr{Y}_\ell$ qui est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^2_\Omega$, avec multiplicité 2. Cette composante est située au-dessus de Ω. Il s'agit de la composante correspondant à $\mathscr{K}_\ell \subseteq \mathscr{V}_\flat$.
– Enfin, une composante « horizontale[1] », $\mathscr{Y}_W$ — qui sera décrite plus loin —, avec multiplicité 3. Il s'agit de la composante correspondant à $\mathscr{W}_\sharp$ et $\mathscr{W}_\flat$.



Toutes ces composantes sont lisses (une fois réduites). L'intersection de $\mathscr{Y}_H$ avec $\mathscr{Y}_W$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur C (on verra en fait qu'il est le fibré trivial $C \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$), celle de $\mathscr{Y}_1$ avec $\mathscr{Y}_W$ est un $\mathbb{P}^2_\Omega$, ainsi que l'intersection de $\mathscr{Y}_1$ avec $\mathscr{Y}_\ell$. Toutes les autres intersections sont vides.

5 Description de $\mathscr{Y}_W$

Considérons C plongée dans le $\mathbb{P}^2_k$ de coordonnées homogènes $(X_\dagger : Y_\dagger : Z_\dagger)$ par l'équation $X_\dagger^3 + Y_\dagger^3 + \nu Z_\dagger^3 = 0$, et Ω plongé dans le $\mathbb{P}^1_k$ de coordonnées homogènes $(U_* : V_*)$ par l'équation $U_*^3 + \nu V_*^3 = 0$. On appelle $\mathscr{E}$ l'éclaté du produit $\mathbb{P}^2_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ le long de $C \times \Omega$ ainsi plongé. Nous nous proposons de prouver que $\mathscr{E}$ est isomorphe à $\mathscr{Y}_W$.

Pour voir cela, commençons par décrire précisément $\mathscr{Y}_W$ comme la réunion de neuf ouverts : la première colonne du tableau suivant donne les noms de ces ouverts, la seconde colonne donne les coordonnées, et la troisième donne les équations satisfaites par ces coordonnées (pour des raisons de place, on a omis systématiquement les indices $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $Z \neq 0$ et $\tilde{U} \neq 0$ à

[1]Le mot « horizontal » s'entend ici par rapport à la désingularisation Φ restreinte à la fibre spéciale, non pas par rapport au morphisme $t = h^3$ car $\mathscr{Y}_W$ est bien inclus dans la fibre $\mathscr{Y}_0$ de t.

11

comprendre sous chacune des coordonnées à l'identique de ce qui est porté par le nom de l'ouvert) :

Ouvert	Coordonnées	Équation
$\mathscr{Y}_{W,X\neq0,a}$	$y, z, (u^3), (u^{-1}v)$	$1 + y^3 + \nu z^3 + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,X\neq0,b}$	$y, z, (uv^{-1}), (v^3)$	$1 + y^3 + \nu z^3 + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,Y\neq0,a}$	$x, z, (u^3), (u^{-1}v)$	$x^3 + 1 + \nu z^3 + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,Y\neq0,b}$	$x, z, (uv^{-1}), (v^3)$	$x^3 + 1 + \nu z^3 + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,Z\neq0,a}$	$x, y, (u^3), (u^{-1}v)$	$x^3 + y^3 + \nu + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,Z\neq0,b}$	$x, y, (uv^{-1}), (v^3)$	$x^3 + y^3 + \nu + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,x}$	$(x^3), (x^{-1}y), (x^{-1}z), v$	$(x^3)(1 + (x^{-1}y)^3 + \nu(x^{-1}z)^3) + 1 + \nu v^3 = 0$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,y}$	$(xy^{-1}), (y^3), (y^{-1}z), v$	$(y^3)((xy^{-1})^3 + 1 + \nu(y^{-1}z)^3) + 1 + \nu v^3 = 0$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,z}$	$(xz^{-1}), (yz^{-1}), (z^3), v$	$(z^3)((xz^{-1})^3 + (yz^{-1}) + \nu) + 1 + \nu v^3 = 0$

(Insistons sur le fait que les formules de passage de coordonnées d'un ouvert à un autre ont été données plus haut. Par exemple, rappelons que $z_{Y\neq0} = y_{X\neq0}^{-1} z_{X\neq0}$ — il ne faut pas se laisser induire en erreur par le fait que les indices $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ ont été supprimés dans le tableau ci-dessus.)

On peut alors décrire des morphismes de chacun de ces ouverts vers $\mathbb{P}^2_k$ d'une part, et vers $\mathbb{P}^1_k$ de l'autre : la deuxième et la troisième colonne du tableau suivant donnent les coordonnées de ces morphismes :

Ouvert	$(X_\dagger : Y_\dagger : Z_\dagger)$	$(U_* : V_*)$
$\mathscr{Y}_{W,X\neq0,a}$	$(1 : y : z)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathscr{Y}_{W,X\neq0,b}$	$(1 : y : z)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathscr{Y}_{W,Y\neq0,a}$	$(x : 1 : z)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathscr{Y}_{W,Y\neq0,b}$	$(x : 1 : z)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathscr{Y}_{W,Z\neq0,a}$	$(x : y : 1)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathscr{Y}_{W,Z\neq0,b}$	$(x : y : 1)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,x}$	$(1 : x^{-1}y : x^{-1}z)$	$(1 : v)$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,y}$	$(xy^{-1} : 1 : y^{-1}z)$	$(1 : v)$
$\mathscr{Y}_{W,\tilde{U}\neq0,z}$	$(xz^{-1} : yz^{-1} : 1)$	$(1 : v)$

Il est clair que ces morphismes se recollent bien et définissent donc une flèche $\Gamma\colon \mathscr{Y}_W \to \mathbb{P}^2_k \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathbb{P}^1_k$. Cette flèche est surjective et de plus, en-dehors de $C \times \Omega$, c'est un isomorphisme, puisque dans ces conditions chacune des équations figurant dans la troisième colonne du premier tableau ci-dessus se résout de façon unique en la variable restante (respectivement $(u^3)_{X\neq0}$, $(v^3)_{X\neq0}$, $(u^3)_{Y\neq0}$, $(v^3)_{Y\neq0}$, $(u^3)_{Z\neq0}$, $(v^3)_{Z\neq0}$, $(x^3)_{\tilde{U}\neq0}$, $(y^3)_{\tilde{U}\neq0}$, $(z^3)_{\tilde{U}\neq0}$).

Reste enfin à voir que Γ se factorise (de façon automatiquement unique) par l'éclatement $\mathscr{E} \to \mathbb{P}^2_k \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathbb{P}^1_k$ et que la flèche $\tilde{\Gamma}$ ainsi obtenue est un isomorphisme. Or cela peut se voir ouvert par ouvert. Sur l'ouvert $\mathscr{Y}_{W,X\neq0,a}$,

par exemple, l'équation $1 + y^3_{X\neq 0} + \nu z^3_{X\neq 0} + (u^3)_{X\neq 0}(1 + \nu(u^{-1}v)^3_{X\neq 0}) = 0$ définit bien un ouvert de l'éclaté du lieu d'équations $1+y^3_{X\neq 0}+\nu z^3_{X\neq 0} = 0$ et $1+\nu(u^{-1}v)^3_{X\neq 0}$ dans $\mathbb{A}^2_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ (de coordonnées $(y_{X\neq 0}, z_{X\neq 0})$ et $((u^{-1}v)_{X\neq 0})$ respectivement). On vérifie aisément que tous ces ouverts recouvrent bien $\mathscr{E}$.

Finalement, on a bien trouvé un isomorphisme $\tilde{\Gamma}\colon \mathscr{Y}_W \to \mathscr{E}$.

Au passage, on peut remarquer que, à l'intérieur de $\mathscr{E}$, l'intersection de $\mathscr{Y}_H$ et $\mathscr{Y}_W$ se voit comme le lieu d'équation $X^3_\dagger + Y^3_\dagger + \nu Z^3_\dagger = 0$, c'est donc précisément $C \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ (vu comme le transformé propre de $C \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ dans $\mathscr{E}$).

6 Considérations sur les groupes de Chow

On appelle CH_d le groupe de Chow des d-cycles modulo équivalence rationnelle. On s'intéresse à la flèche

$$\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_H) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_1) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_\ell) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_W) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$$

ainsi obtenue : partant d'un 1-cycle dans une des composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathscr{Y}_0 = \mathscr{Y}_H + \mathscr{Y}_1 + 2\mathscr{Y}_\ell + 3\mathscr{Y}_W$ de $\mathscr{Y}$ (pour le morphisme $t = h^3\colon \mathscr{Y} \to \mathbb{A}^1_k$), on le pousse (cf. [3], §1.4) en un 1-cycle sur $\mathscr{Y}$ tout entier, qu'on intersecte (cf. [3], §2.3 et §2.6) avec $\mathscr{Y}_H$ pour obtenir un 0-cycle sur cette dernière. On cherche à montrer que l'image de la flèche ci-dessus n'attrape pas tous les 0-cycles de degré 0. Remarquons que $\mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H) \cong \operatorname{Pic}(C)$ avec le degré habituel (cf. [3], théorème 3.3).

Les flèches $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_1) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$ et $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_\ell) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$ sont nulles car $\mathscr{Y}_H$ ne rencontre pas $\mathscr{Y}_1$ ni $\mathscr{Y}_\ell$.

Pour ce qui est de la flèche $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_H) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$, observons que $\mathscr{Y}_0 = \mathscr{Y}_H + \mathscr{Y}_1 + 2\mathscr{Y}_\ell + 3\mathscr{Y}_W \sim 0$, donc (comme $\mathscr{Y}_0$, la fibre spéciale, est un diviseur principal, et en utilisant la formule d'auto-intersection, cf. [3], proposition 2.6(c)) après intersection avec $\mathscr{Y}_H$, l'image de $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_H) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$ tombe dans $3\operatorname{Pic}(C)$.

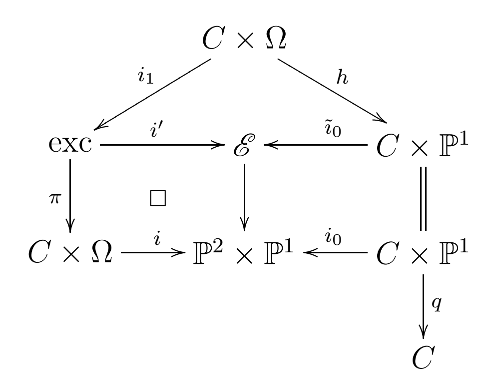
D'après [3], théorème 6.2 ((a) et (c) ainsi que la remarque 6.2.1 qui suit), la flèche $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_W) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$ peut être décrite comme la flèche d'intersection dans $\mathscr{Y}_W$ avec $\mathscr{Y}_H \cap \mathscr{Y}_W$ (qui tombe dans $\mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H \cap \mathscr{Y}_W)$, et poussée ensuite à $\mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$).

Or, d'après la description vue précédemment (et en utilisant [3], proposition 6.7 notamment (e)), $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_W) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic}(C \times \Omega)$, les trois facteurs étant représentés respectivement par : un $\{p\} \times \mathbb{P}^1_k$ avec p un point

13

k-rationnel de $\mathbb{P}^2_k$ non situé sur C, un $l \times \{p\}$ avec p un point k-rationnel de $\mathbb{P}^1_k$ (donc différent de Ω) et l une droite k-rationnelle de $\mathbb{P}^2_k$, et enfin $\pi^* D$ avec D diviseur sur $C \times \Omega$ et π la projection sur $C \times \Omega$ depuis le lieu exceptionnel de $\mathscr{E}$. Pour chacun de ces trois sortes de 1-cycle, la flèche correspondante vers $\mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H) \cong \mathrm{Pic}(C)$ se calcule aisément : dans le premier cas, l'image est nulle, dans le second cas, on obtient la classe d'une droite (qui est nulle dans $\mathrm{Pic}(C)/3\,\mathrm{Pic}(C)$; dans le troisième, la flèche définie est la norme $\mathrm{Pic}(C \times \Omega) \to \mathrm{Pic}(C)$: expliquons brièvement pourquoi.

Considérons le diagramme suivant :



(ici, exc désigne le diviseur exceptionnel de $\mathscr{E}$ — ce dernier étant identifié à $\mathscr{Y}_W$ —, et $C \times \mathbb{P}^1$ est $\mathscr{Y}_H \cap \mathscr{Y}_W$, on a déjà expliqué que c'était le transformé propre de $C \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2_k \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathbb{P}^1_k$ dans $\mathscr{E}$). Partant d'un 0-cycle D sur $C \times \Omega$, on construit $q_* \tilde{i}_0^* i'_* \pi^* D$: or, d'après les références déjà citées ([3], théorème 6.2), c'est $q_* h_* i_1^* \pi^* D$. Mais $i_1 \pi = 1_{C \times \Omega}$, donc c'est $q_* h_* D$, et comme $qh \colon C \times \Omega \to C$ est la projection, ceci donne bien la flèche de norme attendue.

7 Non surjectivité de la norme

Rappelons que $k = \mathbb{C}(\!(\nu)\!)$. Notons $K = k(\sqrt[3]{\nu})$, de sorte que $\Omega = \mathrm{Spec}\,K$.

On identifie $\mathrm{Pic}^0(C)$ à $C(k)$ (où $C \subset \mathbb{P}^2_k$ est la courbe définie par $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 = 0$) en choisissant $o = (1 : -1 : 0)$ comme origine.

Considérons la fonction rationnelle $f = (X + \zeta^2 Y)/(X + \zeta Y)$ sur C (on rappelle que ζ est une racine primitive cubique de l'unité). Son diviseur $\mathrm{div}(f)$ est un triple puisque $(X+Y)(X+\zeta Y)(X+\zeta^2 Y) = -\nu Z^3$ (et que deux d'entre $X+Y$, $X+\zeta Y$ et $X+\zeta^2 Y$ ne s'annulent jamais simultanément sur C). Plus précisément, $\mathrm{div}(f) = 3q - 3q'$ où $q = (1 : -\zeta : 0)$ et $q' = (1 : -\zeta^2 : 0)$ sont les deux points de 3-torsion de $C(k)$. Remarquons que $f(o) = 1$.

L'équation $\lambda^3 = f$ (dans $\mathbb{P}^1_C$) définit donc un revêtement non ramifié $C' \to C$ de degré 3. Choisissant arbitrairement une origine o' sur C' au-dessus de o, l'isogénie de courbes elliptiques $C' \to C$ s'inscrit dans une suite exacte courte $1 \to \boldsymbol{\mu}_3 \to C' \to C \to 1$. La suite exacte longue associée donne alors un morphisme de groupes, $C(k)/3C(k) \to k^\times/k^{\times 3}$, associé à f. En déroulant les définitions, on voit que la flèche $C(k) \to k^\times/k^{\times 3}$ est donnée (au moins en-dehors du support du diviseur de f) de façon « élémentaire » par l'évaluation (ou sa classe dans $k^\times/k^{\times 3}$) de la fonction f au point considéré. (Dans ces circonstances, on peut éventuellement voir le fait que cette flèche est un morphisme d'après la loi de réciprocité de Weil — cf. [5], exercices 2.10 et 2.11 —, si $p_1 + p_2 = p_3$ sur C, on a $f(p_3) = f(p_1) \cdot f(p_2)$ dans $k^\times/k^{\times 3}$ car le diviseur $[p_3] - [p_1] - [p_2] + [o]$ est principal, disons $\mathrm{div}(g)$, et $f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f))$ est un cube.) En q et q', la flèche $C(k) \to k^\times/k^{\times 3}$ vaut respectivement la classe de ν et de ν^2 (cela peut se voir par exemple par continuité ν-adique de cette flèche, en considérant un point tel que $(1 + \frac{1}{3}\nu^{3N+1} : -\zeta : \nu^N + \cdots))$ très proche de q.

Passons maintenant à $K = k(\sqrt[3]{\nu}) = \mathbb{C}(\!(\sqrt[3]{\nu})\!)$. La flèche $C(K)/3C(K) \to K^\times/K^{\times 3}$ définie comme ci-dessus (avec la même fonction f) est nulle. Pour s'en convaincre, il suffit de prouver la même chose pour la courbe (K-isomorphe à C) $X^3+Y^3+\hat{Z}^3 = 0$. Considérons pour cela un K-point $(X : Y : \hat{Z})$ quelconque sur cette courbe, normalisé pour que la valuation (relative à $\sqrt[3]{\nu}$) de deux d'entre $X, Y, \hat{Z}$ soit nulle. Il en va donc de même de la valuation de deux d'entre $X+Y, X+\zeta Y, X+\zeta^2 Y$; comme $(X+Y)(X+\zeta Y)(X+\zeta^2 Y) = -\hat{Z}^3$, la valuation du troisième est un triple, ce qui montre que la valuation de f est bien un triple, ce qu'on voulait.

La flèche composée $C(K)/3C(K) \to K^\times/K^{\times 3} \to k^\times/k^{\times 3}$ (où la deuxième flèche provient de la norme $K^\times \to k^\times$) est donc nulle. Il en va donc de même de la composée $C(K)/3C(K) \to C(k)/3C(k) \to k^\times/k^{\times 3}$ (ces deux composées sont égales, ce qui se voit facilement si on utilise la description « élémentaire » des flèches, donnée plus haut ; pour les points q et q' il n'y a pas de problème).

Or si on considère le point défini par $X = -\zeta$, $Y = 1 + \nu$ et $Z = -\sqrt[3]{3}(1 + \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{81}\nu^3 + O(\nu^4))$, son image par la flèche $C(k)/3C(k) \to k^\times/k^{\times 3}$ produite par f n'est manifestement pas nulle (la valuation de f en ce point n'est pas un triple) : donc ce point n'est pas dans l'image de la flèche de norme $C(K)/3C(K) \to C(k)/3C(k)$.

15

8 Conclusion

Sur le corps $\mathbb{C}((\nu, t))$ (ou n'importe quel corps entre lui et $\mathbb{C}((\nu))((t))$), les deux points rationnels de l'hypersurface cubique d'équation

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + t(U^3 + \nu V^3) = 0 \qquad (*)$$

donnés par

$$X = 1\ ,\ \ Y = -1\ ,\ \ Z = 0\ ,\ \ U = 0\ ,\ \ V = 0$$

et

$$X = -\zeta\ ,\ \ Y = 1+\nu\ ,\ \ Z = -\sqrt[3]{3}(1+\frac{1}{3}\nu - \frac{1}{81}\nu^3 + O(\nu^4))\ ,\ \ U = 0\ ,\ \ V = 0$$

ne sont pas rationnellement équivalents. En effet, leur différence définit un 0-cycle de degré 0, qui est un 1-cycle si on regarde la dimension absolue sur $\mathscr{Y} \setminus \mathscr{Y}_0$, qu'on étend en un 1-cycle α sur $\mathscr{Y}$ tout entier. L'image $\alpha \cap \mathscr{Y}_H$ de α par la flèche d'intersection $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$ est un 0-cycle de degré 0 sur $\mathscr{Y}_H$ donné par la différence entre les points $(y = -1, z = 0, uw^{-1} = 0, vw^{-1} = 0, w^3 = 0)$ et $(y = -\zeta^2(1+\nu), z = -\sqrt[3]{3}\zeta^2(1+\frac{1}{3}\nu+O(\nu^3)), uw^{-1} = 0, vw^{-1} = 0, w^3 = 0)$. D'après les parties précédentes, cet élément $\alpha \cap \mathscr{Y}_H$ n'est pas dans l'image de la flèche $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_H) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_1) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_\ell) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_W) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_H)$, ou, si on veut, $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_0) \to \mathrm{CH}_0(\mathscr{Y}_0)$ (cf. [3], exemple 1.3.1). C'est donc que le cycle α de départ n'était pas dans l'image de $\mathrm{CH}_1(\mathscr{Y}_0) \to \mathrm{CH}_1(\mathscr{Y})$, i.e., qu'il était non nul (non rationnellement équivalent à zéro) sur $\mathscr{Y} \setminus \mathscr{Y}_0$ ([3], proposition 1.8).

9 Remarques

Le résultat, présenté ci-dessus sur $\mathbb{C}((\nu, t))$, est également valable sur $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ou sur $\mathbb{C}(\nu)(\sqrt[3]{1+\nu+\frac{1}{3}\nu^2})(t)$ (corps de définition des points étudiés dans les deux dernières parties : notons qu'il s'agit là du corps des fonctions d'une surface) — ou sur tout corps intermédiaire entre eux. Il est à mettre en regard du fait que sur une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 10 sur un corps C_2, ou sur $\mathbb{Q}_p$, deux points rationnels quelconques sont R-équivalents et (donc) le groupe des 0-cycles de degré 0 est nul. La non-nullité du groupe de Chow d'une *surface* cubique X sur $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{C}((\nu, t))$ peut s'obtenir en considérant le groupe de Brauer (notamment, si un élément

du groupe de Brauer de X s'évalue différemment en deux points rationnels, ces points ne peuvent pas être rationnellement équivalents) ; mais pour X de dimension au moins 3 sur un corps k, on a $\operatorname{Br} X = \operatorname{Br} k$, ce qui met en échec cette approche ici.

L'espoir initial était d'arriver à un contre-exemple sur $\mathbb{F}_p(\!(t)\!)$, au moins pour $p \gg 0$, ce qui aurait permis de déduire la même chose sur $\mathbb{Q}_p$ pour $p \gg 0$, ou bien de le démontrer directement sur $\mathbb{Q}_p$. Malheureusement, cette idée échoue car la dernière étape (celle de la non-surjectivité de la norme) ne peut pas s'appliquer : la flèche de norme est toujours surjective[2].

Références

[1] C. S. Dalawat, *Groupe des classes de* 0*-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (1993).

[2] C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface rationnelle sur un corps local*, disponible sur `www.arxiv.org` comme `math.AG/0302157` (extrait de [1]) ; à paraître dans *Compos. Math.*

[3] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).

[4] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press.

[5] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 106.

[2]Si K est une extension finie de $k = \mathbb{F}_p$ et C une courbe elliptique sur k, le conoyau de la flèche de norme $C(K) \to C(k)$ est contenu dans $H^1(k, N)$ avec N la variété abélienne noyau de la norme $\mathfrak{R}_{K/k}C \to C$; or le H^1 d'un corps fini à valeurs dans une variété abélienne est nul.

Very free R-equivalence on toric models

David A. Madore*

15th April 2005

Abstract

Using the theory of the universal torsor, we prove that two rational points on a smooth projective toric variety over an infinite field that are rationally equivalent can in fact be connected by a very free rational curve. We also show a similar result over del Pezzo surfaces of degree 5.

Introduction

Let X be a smooth projective variety over an infinite field k, and assume that X is (geometrically) *separably rationally connected*, meaning that, over the algebraic closure $\bar{k}$, there exists an $f\colon \mathbb{P}^1_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ which is "very free" in the sense that f^*T_X is ample (in other words, $H^1(\mathbb{P}^1, (f^*T_X)(-2)) = 0$). If x and y are two k-rational points of X (assuming there are any) which are "R-equivalent", that is, which can be joined by a chain of rational curves on X (each defined over k), we can ask ourselves whether there exists $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ defined over k such that $f(0) = x$, and $f(\infty) = y$ and $H^1(\mathbb{P}^1, (f^*T_X)(-2)) = 0$: if such is the case, we say that x and y are R-equivalent by a single very free rational curve.

It is true over k algebraically closed that any two points on a smooth projective separably rationally connected variety X are in fact joined by a single very free rational curve (see [7] for a proof of this fact as well as all introductory material on rationally connected varieties).

*Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, F75230 Paris cedex 05, France. Email address: david.madore@ens.fr

1

In the case where k is no longer algebraically closed but "large", meaning that every irreducible variety that has a smooth k-point has a Zariski dense subset of them, for example when k is a local field, then the answer is again affirmative: this is the result of a recent work by Kollár ([8], theorem 23)—any two points (on a smooth projective rationally connected variety) which are R-equivalent are so by a single very free rational curve.

For other fields k, however, the answer to the question is unknown, even in some simple cases.

When X is a smooth del Pezzo surface of degree 4 over k, for example, it is known that every universal torsor over X (a term which we will define below) having a k-point is k-rational (see [3]), so two rationally equivalent points on X are R-equivalent, but it is not known whether they can be joined by a single very free rational curve. Perhaps more to the point, it can be shown, using the technique of the present paper, that, for every R-equivalence class α of $X(k)$, there is a nonempty Zariski open set U_α of X such that if P and Q are in α and in U_α then they are joined by a single very free rational curve—but it remains unknown whether, in fact, U_α can be taken to be X.

A positive answer to the question in full generality (for any infinite field k and any separably rationally connected variety X) is conceivable, but seems out of reach with present techniques.

In this article we prove a positive result when X is a toric model (i.e., a smooth equivariant compactification of a torus) over an infinite field k: this is possible because a universal torsor can be explicitly constructed, and because rational curves can be moved thanks to the action of the torus. In the next section, we also prove a positive result in the case where X is a del Pezzo surface of degree 5 (another case in which the universal torsor is well controlled). We start with some general remarks on very free R-equivalence.

1 General framework

We introduce a notation: if k is a field and X an irreducible variety over k, and if $x, y \in X(k)$, let $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ stand for the following statement: there exists an irreducible variety M over k such that $M(k)$ is Zariski-dense in M, and a dominant and separable rational map $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$ such that F restricted to $M \times \{0\}$ is constant equal to x and F restricted to $M \times \{\infty\}$ is constant equal to y.

The following proposition summarizes some general facts about this relation:

Proposition 1. *Assume k is a field and X is an irreducible variety over k. Then:*

1. *If $U \subseteq X$ is a Zariski open set and $x, y \in U(k)$ then $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ if and only if $x \overset{U}{\leftrightarrow} y$.*
2. *If $X = \mathbb{P}^n_k$ then $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ for any two x, y.*
3. *Suppose $p\colon Z \dashrightarrow X$ is a dominant and separable rational map with Z an irreducible variety over k: then, for any $x, y \in Z(k)$ at which p is defined, if $x \overset{Z}{\leftrightarrow} y$ then $p(x) \overset{X}{\leftrightarrow} p(y)$.*
4. *Suppose X is smooth projective: then, for any $x, y \in X(k)$, if $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ then x and y are R-equivalent by a single very free rational curve.*

The first fact is trivial (restrict F to U on the range).

To prove the second, consider $x, y \in \mathbb{P}^n_k(k)$ and take the family of all smooth conics passing through x and y and parameterize them rationally: obviously we can find an open set M in some affine space over k (so certainly $M(k)$ is dense) and a dominant and separable morphism $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ which takes $M \times \{0\}$ to x and $M \times \{\infty\}$ to y.

The third statement is trivial: merely compose F with p.

To get the fourth, first notice that when X is projective we can by restricting M assume that F is a morphism; now apply the following geometric result (see, e.g., [7], II.3.10):

Proposition 2. *Let $\bar{k}$ be an algebraically closed field, M an irreducible variety over $\bar{k}$, and X a smooth projective variety over $\bar{k}$. Let $x \in X$. Finally, let $F\colon M \times \mathbb{P}^1 \to X$ be a separable and dominant morphism such that $F(M \times \{0\}) = \{x\}$. Then there exists a* nonempty *Zariski open set M^0 of M such that for all $p \in M^0$ the morphism $F_p\colon \mathbb{P}^1 \to X$ satisfies the condition that $F_p^* T_X$ be ample.*

—and make use of the fact that M^0 has a point over k by assumption.

3

2 R-equivalence on universal torsors

The goal of this section is to prove the following result:

Proposition 3. *Let T be an algebraic torus over an infinite field k, and X a smooth equivariant compactification of T; then given two k-rational points x, y of X, if x and y are rationally equivalent, they are R-equivalent by a single very free rational curve.*

To do this, we use the following result, whose proof will be given in the appendix:

Proposition 4. *Let T be an algebraic torus on a field k, and X a smooth equivariant compactification of T; then there exists a torus S over k, a "universal" S-torsor $p\colon \mathscr{T} \to X$, and an S-equivariant open embedding of $\mathscr{T}$ in an affine space on which S acts linearly.*

"Universal" is to be taken in the sense of [1], II.C (or [2], example 2.3.3), which we presently recall. Call $H^1(X, S)$ the étale cohomology group classifying S-torsors on X, and $[\mathscr{T}]$ the class of p in it. Define a map $\chi\colon H^1(X, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(S^*, \mathrm{Pic}\,\bar{X})$ which sends the class of an S-torsor on X, say $\mathscr{S}$, and a character $\lambda \in S^* = \mathrm{Hom}(\bar{S}, \bar{\mathbb{G}}_m)$ to the class of the $\bar{\mathbb{G}}_m$-torsor on $\bar{X}$ deduced from $\bar{\mathscr{S}}$ by λ. To say that $\mathscr{T}$ is universal means that $S^* = \mathrm{Pic}\,\bar{X}$ and that $\chi([\mathscr{T}])$ is the identity on $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$.

We will need the following fact:

Lemma 5. *Let T and X be as in proposition 3, and let $p\colon \mathscr{T} \to X$ be a universal torsor on X. Then there exists a point $z \in T(k)$ such that the class $[\mathscr{T} \times_X \mathrm{Spec}\,k_z] \in H^1(k, S)$ of the fiber of $\mathscr{T}$ over z is trivial, i.e. $\mathscr{T}$ has a k-point over z.*

Proof. Let $\alpha = [\mathscr{T} \times_X \mathrm{Spec}\,k_o] \in H^1(k, S)$ be the class of the fiber of $\mathscr{T}$ over the origin $o \in T(k)$. Let $\mathscr{T}^o$ be the torsor defined by $[\mathscr{T}^o] = [\mathscr{T}] - \alpha$: then $\mathscr{T}^o$ is the universal torsor that is trivial[1] above o, and, from the discussion in [1], III (see also [2], 2.4.4), the map $T(k) \to H^1(k, S)$, $z \mapsto [\mathscr{T}^o \times_X \mathrm{Spec}\,k_z]$ is surjective. In particular, there exists z such that $[\mathscr{T}^o \times_X \mathrm{Spec}\,k_z] = -\alpha$, so $[\mathscr{T} \times_X \mathrm{Spec}\,k_z] - \alpha = -\alpha$, which proves that $[\mathscr{T} \times_X \mathrm{Spec}\,k_z]$ is nil, what we wanted. □

[1] In fact, if the torsor $\mathscr{T}$ is that which we shall construct in the appendix, it is easy to see that it is already the universal torsor trivial over o; however, we shall not use this fact, which only very slightly simplifies the proof.

Now apply lemma 5 to the universal torsor $\mathscr{T}$ given by proposition 4: we see that there exists $z' \in T(k)$ such that the fiber of $\mathscr{T}$ over z' is trivial. Apply now the same lemma to the universal torsor $\mathscr{T}^x$ with trivial fiber over x (in other words the torsor given by $[\mathscr{T}^x] = [\mathscr{T}] - [\mathscr{T} \times_X \operatorname{Spec} k_x]$): so there exists $z \in T(k)$ such that the fiber of $\mathscr{T}^x$ over z is trivial. Let $\tau_{z'-z} \colon X \to X$ be the translation by $z' - z$: the torsor $\tau_{z'-z}^* \mathscr{T}$ is still universal (since $\tau_{z'-z}$ acts trivially on $\operatorname{Pic} \bar{X}$) and it is trivial over z—therefore it is isomorphic to $\mathscr{T}^x$ (which has the same property).

Let $x' = \tau_{z'-z}(x)$ and $y' = \tau_{z'-z}(y)$. Since $\mathscr{T}^x \cong \tau_{z'-z}^* \mathscr{T}$ is trivial over x, it follows that $\mathscr{T}$ is trivial over x'. But, since y is rationally equivalent to x by [1], II.B, proposition 1, $\mathscr{T}^x$ is also trivial over y, and therefore so is $\mathscr{T}$ over y'. So there exist points P and Q of $\mathscr{T}(k)$ over x' and y' respectively, and proposition 4 shows that P and Q live inside an open set of an affine space $\mathbb{A}$ over k.

Finally, using the general facts laid out in proposition 1 (1–4), we have $P \overset{\mathbb{A}}{\leftrightarrow} Q$ (use facts 1–2) so $P \overset{\mathscr{T}}{\leftrightarrow} Q$ (fact 1 again) and therefore $x' \overset{X}{\leftrightarrow} y'$ (fact 3: compose with p) so $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ (compose with $\tau_{z-z'}$) which gives the desired conclusion (from fact 4). □

3 Del Pezzo surfaces of degree 5

We now turn to the case where X is a del Pezzo surface of degree 5 over k. Then it is known that there is a unique universal torsor $p \colon \mathscr{T} \to X$ on X ("unique" up to non-unique isomorphism), trivial over every point, and that it is an open set of the Grassmanian variety $\operatorname{Gr}(2,5)$ of lines in $\mathbb{P}^4$ (Skorobogatov, [11], theorem 3.1.4).

If now x and y are two arbitrary k-rational points on X, pick k-rational points in $p^{-1}(x)$ and $p^{-1}(y)$ (which exist because $\mathscr{T}$ is trivial over x and y), corresponding to two lines Δ and Λ in $\mathbb{P}^4$. Now let Π and Π' be two hyperplanes in $\mathbb{P}^4$ neither of which contains either Δ or Λ and such that the intersection points P, P' of Π, Π' with Δ are distinct and similarly for the intersection points Q, Q' of Π, Π' with Λ. Then we have a rational map $\Pi \times \Pi' \dashrightarrow \mathscr{T} \to X$ taking a point on Π and one on Π' to the line they define (in general) and then to the image point by p in X. Again by the general facts laid out in proposition 1, since $(P, P') \overset{\Pi\times\Pi'}{\leftrightarrow} (Q, Q')$, we get $x \overset{X}{\leftrightarrow} y$ and consequently x and y are R-equivalent by a single very free rational curve.

Thus, we have shown:

Proposition 6. *Let X be a del Pezzo surface of degree 5 over an infinite field k; then given any two k-rational points x, y of X, there exists $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ such that $f(0) = x$ and $f(\infty) = y$ with, further, f^*T_X ample.*

Appendix: Explicit construction of a universal torsor over a toric variety

Proposition 4 remains to be settled. A proof can be found in [10] (proposition 8.5), but the one we give below, for the reader's convenience, seems much more straightforward.

Historical remark: The construction described here was introduced in [5] and [4]. Here we give a presentation similar to the one contained in [9], although universality of the torsor is not shown there.

Let $T^* = \mathrm{Hom}_{\bar k}(\bar T, \bar{\mathbb{G}}_m)$ be the lattice of characters of the torus T, and $T_* = \mathrm{Hom}_{\bar k}(\bar{\mathbb{G}}_m, \bar T)$ the lattice, dual to the former, of cocharacters. One and the other are endowed with an action of the Galois group $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar k/k)$. We write $T^*_{\mathbb{R}} = T^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ for the real vector space in which T^* lives, and $T_{*\mathbb{R}} = T_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ for the real vector space, dual to the former, in which T_* lives. The general theory of toric varieties (cf. [6], in particular §2.3) allows us to describe X by means of a fan Σ of strongly convex rational polyhedral cones in $T_{*\mathbb{R}}$. The fact that X is smooth means (cf. [6], §2.1) that every cone $\sigma \in \Sigma$ is spanned by part of a basis of T_*, determined uniquely by σ: call B_σ the part in question, and let $P = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} B_\sigma$ be the union of the B_σ for all $\sigma \in \Sigma$. Then P is a finite part of T_* which spans the latter and is stable under the action of Γ. For every $\sigma \in \Sigma$, we have $B_\sigma = \sigma \cap P$, and σ is spanned by $\sigma \cap P$.

Now let V_* be the (free) lattice with basis P (with the obvious action of Γ making it a permutation lattice), and V^* the dual lattice, and $V_{*\mathbb{R}}$ and $V^*_{\mathbb{R}}$ the real vector spaces in which they respectively live. We call V the dual torus to V^* (i.e. the torus of which V^* is the character lattice), so $\bar V = \mathrm{Spec}\, \bar k[z^u : u \in V^*]$: since V^* is a permutation lattice, V is a quasi-trivial torus. And let $\mathbf{A}$ be the affine space defined by the cone of $V_{*\mathbb{R}}$ spanned by the elements of P. Since P spans T_*, we have a surjective morphism $V_* \to T_*$ and thus an injection $T^* \to V^*$.

From the description in [6], §3.3, the lattice V^* is precisely the group $\mathrm{Div}_{\bar{X}\setminus\bar{T}}\,\bar{X}$ of $\bar{T}$-invariant divisors of $\bar{X}$, by the arrow which sends a $u \in V^*$ to $\sum_{p\in P} u(p)D_p$ (where D_p is the closure of the orbit of $\bar{T}$ acting on $\bar{X}$ associated to the ray spanned by p in $V_{*\mathbb{R}}$). With this identification, $T^* \to V^*$ sends a $u \in T^*$ to the principal divisor $\mathrm{div}(t^u)$, and its cokernel ([6], §3.4) is the Picard group of $\bar{X}$, which is itself a lattice, say S^*, dual to a torus S. We therefore have the short exact sequence of lattices $0 \to T^* \to V^* \to S^* \to 0$, equal to $0 \to \bar{k}[\bar{T}]^\times/\bar{k}^\times \to \mathrm{Div}_{\bar{X}\setminus\bar{T}}\,\bar{X} \to \mathrm{Pic}\,\bar{X} \to 0$, and the dual short exact sequence of tori $1 \to S \to V \to T \to 1$.

For every cone $\sigma \in \Sigma$, let $\sigma^\vee = \{u \in T^*_{\mathbb{R}} : (\forall v \in \sigma)(\langle u, v\rangle \geq 0)\}$ denote the dual cone, and let $\bar{X}(\sigma) = \mathrm{Spec}\,\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$ be the spectrum of the semigroup algebra of $T^* \cap \sigma^\vee$: thus, $\bar{X}$ is obtained precisely by gluing the $\bar{X}(\sigma)$ for $\sigma \in \Sigma$ (identifying the open set $\bar{X}(\sigma \cap \sigma')$ in $\bar{X}(\sigma)$ and $\bar{X}(\sigma')$). Similarly, given a cone $\sigma \in \Sigma$, which is, therefore, spanned by a finite set (called B_σ) of elements of P, we can consider the cone $\tilde{\sigma}$ in $V_{*\mathbb{R}}$ spanned by the same elements of P, and its dual $\tilde{\sigma}^\vee$, a cone in $V^*_{\mathbb{R}}$: let us call $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) = \mathrm{Spec}\,\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ the spectrum of the corresponding semigroup algebra. Thus $\bar{\mathbf{A}}(\sigma)$ is an open set in $\bar{\mathbf{A}}$, containing $\bar{V}$. Furthermore, the inclusion $T^* \to V^*$, which manifestly sends $T^* \cap \sigma^\vee$ inside $V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee$, defines a morphism $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$.

To make the situation clearer, let us presently prove the following lemma (lemma 5.1 of [9]):

Lemma 7. *Let $\delta \in S^*$ and let $\sigma \in \Sigma$. Then there exists a $u_\delta \in V^*$ (not necessarily unique) which maps to $\delta \in S^*$ (by the arrow $V^* \to S^*$ defined above) and such that $\langle u_\delta, p\rangle = 0$ for all $p \in B_\sigma$ (in other words $u_\delta \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee \cap (-\tilde{\sigma}^\vee)$).*

Proof. The morphism $V^* \to S^*$ being surjective, there exists $v \in V^*$ which maps to $\delta \in S^*$. Since B_σ is a subset of a basis of T_*, there exists $\tilde{v} \in T^*$ such that $\langle \tilde{v}, p\rangle = \langle v, p\rangle$ for all $p \in B_\sigma$. We then take $u_\delta = v - \tilde{v}$. □

A u_δ as given by the previous lemma defines a $z^{u_\delta} \in \bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ which is invertible in this algebra, since $-u_\delta$ manifestly also belongs to $\tilde{\sigma}^\vee$. We deduce the following description: □

Fact 8. *$\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$, seen as a module over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$, is free and a basis is formed by invertible elements z^{u_δ}, one for each δ in S^*; the free sub-module of rank 1 corresponding to a δ in S^* is precisely the set of linear combinations of the z^u for those $u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee$ for which $u|_{S_*}$ (that is,*

7

the image of u by $V^* \to S^*$) is δ. This can also be expressed by saying that $\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ is graded by S^* as an algebra over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$, each graded component containing an invertible element.

In particular, we see that if $\sigma' \subseteq \sigma$ in Σ, the tensor product of $k[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ with $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma'^\vee]$ over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$ is $k[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}'^\vee]$, which means that the inverse image by $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$ of $\bar{X}(\sigma')$ is $\bar{\mathbf{A}}(\sigma')$, and, more precisely, that the morphism $\bar{\mathbf{A}}(\sigma') \to \bar{X}(\sigma')$ is exactly the restriction of $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$ to $\bar{X}(\sigma')$. The union of the $\bar{\mathbf{A}}(\sigma)$ for $\sigma \in \Sigma$, which we call $\bar{\mathscr{T}}$, comes from a variety $\mathscr{T}$ defined over k and open in $\mathbf{A}$, and by gluing we have a morphism $\mathscr{T} \to X$.

We also see that $\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ is faithfully flat over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$. Thus, the morphism $\mathscr{T} \to X$ is faithfully flat. We get an action of V on $\mathscr{T}$ because $\mathscr{T}$ has been constructed as a toric variety (with cones $\tilde{\sigma} \subseteq V_{*\mathbb{R}}$); therefore, by restriction, we get an action of S on $\mathscr{T}$, which by construction leaves X invariant. To see that this gives us a torsor under S, it is enough to see that each $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$ is a torsor under $\bar{S}$. In other words, we must show that the morphism

$$\theta \colon \bar{S} \times \bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{\mathbf{A}}(\sigma) \times_{\bar{X}(\sigma)} \bar{\mathbf{A}}(\sigma)\ , \quad (s,a) \mapsto (s \cdot a, a)$$

is an isomorphism. But the (co)morphism of the associated algebras from which it comes is given by

$$\begin{aligned} \theta^* \colon \bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee] \otimes_{\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]} \bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee] \\ \to \bar{k}[\chi^\lambda : \lambda \in S^*] \otimes_{\bar{k}} \bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee] \\ z^u \otimes z^{u'} \mapsto \chi^{u|_{S_*}} \otimes z^{u+u'} \end{aligned}$$

To see that this is indeed an isomorphism, notice that according to fact 8, the left-hand side has a basis over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$ formed by the $z^{u_\delta} \otimes z^{u_{\delta'}}$ with u_δ as given in lemma 7, and the right-hand side has a basis formed by the $\chi^\lambda \otimes z^{u_{\delta''}}$. And on these two bases, the homomorphism in question is represented by a diagonal matrix whose coefficients are $t^{u_\delta + u_{\delta'} - u_{\delta''}}$ (for $\delta'' = \delta + \delta'$ and $\lambda = \delta$), which are invertible in $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$.

It remains to see that this torsor $p \colon \mathscr{T} \to X$ is indeed universal.

If $\sigma \in \Sigma$, since $\bar{X}(\sigma)$ is smooth, it is abstractly isomorphic to $\bar{\mathbb{A}}^d \times \bar{\mathbb{G}}_m^{n-d}$ (where d, say, is the dimension of σ and n that of T). In particular we have $\operatorname{Pic} \bar{X}(\sigma) = 0$; and furthermore $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]^\times = \{t^u \colon u \in$

8

$T^* \cap \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee)\}$. The general exact sequence $0 \to \bar{k}[\bar{U}]^\times/\bar{k}^\times \to \mathrm{Div}_{\bar{X}\setminus\bar{U}}\,\bar{X} \to \mathrm{Pic}\,\bar{X} \to 0$ (cf. [2], (2.3.10)) when $\mathrm{Pic}\,\bar{U} = 0$ becomes, for $\bar{U} = \bar{X}(\sigma)$,

$$0 \to T^* \cap \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee) \to V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee \cap (-\tilde{\sigma}^\vee) \to S^* \to 0$$

The dual short exact sequence of tori is $1 \to \bar{S} \to \bar{M}_\sigma \to \bar{R}_\sigma \to 1$, where $\bar{R}_\sigma$ and $\bar{M}_\sigma$ are quotients of $\bar{T}$ and $\bar{V}$ respectively. Furthermore, the quotient morphism $\bar{T} \to \bar{R}_\sigma$ extends to $\bar{X}(\sigma)$ (of which $\bar{T}$ is an open set): precisely, the morphisms $\bar{T} \to \bar{X}(\sigma) \to \bar{R}_\sigma$ give, on the associated algebras,

$$\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee)] \to \bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee] \to \bar{k}[t^u : u \in T^*]$$

By corollary 2.3.4 of [2], it is now sufficient to prove that $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$ is obtained as the pullback of $\bar{M}_\sigma \to \bar{R}_\sigma$ by the arrow $\bar{X}(\sigma) \to \bar{R}_\sigma$, moreover in a way compatible with the restrictions when $\sigma' \subseteq \sigma$. In other words, we are to determine (in a natural way) the fiber product $\bar{M}_\sigma \times_{\bar{R}_\sigma} \bar{X}(\sigma)$; this is the affine scheme whose algebra is the tensor product

$$\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee \cap (-\tilde{\sigma}^\vee)] \otimes_{\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee)]} \bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$$

But (from fact 8) $\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$ is free over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee]$ with basis $\{z^{u_\delta}\}$ for $\delta \in S^*$; and for precisely the same reasons, $\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee \cap (-\tilde{\sigma}^\vee)]$ is free over $\bar{k}[t^u : u \in T^* \cap \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee)]$ with the same basis. That is to say that the above tensor product is (by the natural map) $\bar{k}[z^u : u \in V^* \cap \tilde{\sigma}^\vee]$, in other words that $\bar{M}_\sigma \times_{\bar{R}_\sigma} \bar{X}(\sigma) = \bar{\mathbf{A}}(\sigma)$ (naturally).

This shows that the torsor $p \colon \mathscr{T} \to X$, obtained by gluing these different $\bar{\mathbf{A}}(\sigma) \to \bar{X}(\sigma)$, is indeed universal.

Acknowledgements: The author wishes to thank Jean-Louis Colliot-Thélène for his illuminating explanations on the universal torsor and its use, and Emmanuel Peyre for providing some of the references below and for inviting me to Grenoble to give a talk on this construction. I am also indebted to Laurent Moret-Bailly for showing me how to state clearly (and gather in a single place) the facts listed in proposition 1.

References

[1] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, "La descente sur les variétés rationnelles", in *Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979*, ed. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980, 223-237.

[2] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, "La descente sur les variétés rationnelles II", *Duke Math. Journal*, **54** (1987), 375–492.

[3] J.-L. Colliot-Thélène & A. N. Skorobogatov, "R-equivalence on Conic Bundles of Degree 4", *Duke Math. Journal*, **54** (1987), 671–677.

[4] D. Cox, "The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety", *J. Alg. Geom.*, **4** (1995), 17–50.

[5] T. Delzant, "Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment", *Bull. Soc. Math. France*, **116** (1988), 315–339.

[6] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press.

[7] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[8] J. Kollár, "Specialization of zero-cycles", preprint, available on `www.arxiv.org` as `math.AG/0205148`.

[9] A. S. Merkurjev & I. A. Panin, "K-theory of algebraic tori and toric varieties", K*-theory*, **12** (1997), no. 2, 101–143.

[10] P. Salberger, "Tamagawa Measures on Universal Torsors and Points of Bounded Height on Fano Varieties", *Nombre et répartition des points de hauteur bornée*, Astérisque **251** (1998), 91–258.

[11] A. Skorobogatov, *Torsors and Rational Points*, Cambridge Tracts in Mathematics (**144**).